

西方邊界流模擬:切比雪夫排列法與沉浸邊界法整合

張光宇 郭鴻基 曾于恆

國立台灣大學大氣科學研究所

摘要

西方邊界流(Western boundary current)現象是由於海洋中的波動能量在海洋西邊界不斷地累積而產生,在狹窄的西方邊界流區域內有著整個海洋中的最大流速,藉以維持海洋流體運動的質量守恆。雖然西方邊界流的生成理論在過去已有相當好的理解,但在數值模擬中,海洋的複雜邊界會大幅提高模擬的困難度,本文希望能夠擷取具有指數收斂與快速轉換等性質的切比雪夫排列法(Chebyshev Collocation Method)以及在模式中能藉由邊界強迫機制有效處理複雜邊界問題的沉浸邊界法(Immersed Boundary Method)兩者之優點,建立出一套同時具有高精確度以及高效率的計算方法。

研究中利用海洋渦度方程式設計一系列二維正壓模式進行模擬,初步模擬顯示切比雪夫排列法及沉浸邊界法皆可有效地掌握西方邊界流;此外,由行星渦度梯度產生的羅士比波(Rossby Wave)會在海洋西方邊界造成能量累積,為暫態(Transient state)西方邊界流生成的物理機制,而非線性動力則扮演了將波動能量重新分佈的角色。然而,藉由分解模式定義域的方法整合兩種數值方法時,則因兩者南北向網格點解析度與收斂速度差異過大而導致合併處誤差不連續,於是誤差將於合併邊界處累積,產生數值上的不穩定;研究結果顯示,藉由控制子定義域間通量值及數值方法間精確度達一致將可有效抑制數值不穩定產生,延長模式預報時間。

關鍵詞: 西方邊界流、切比雪夫排列法、沉浸邊界法、分解定義域。

一、前言

海洋與大氣雖皆屬於地物流力的範疇,但其中的控制方程卻隱含了一個決定性的差異,自由大氣的東西是沒有邊界的,但海洋卻有顯著的大陸邊界存在,故當我們欲建立一套有效率且精確的海氣耦合模式時,首先須要克服的就是複雜大陸邊界對於模式邊界條件給定的挑戰,為了給定良好的邊界條件,我們引用 Tseng et al. (2003) 的工作,希望藉由沉浸邊界法克服複雜邊界的難題,而為了能有效率且精確的進行模擬,我們引用了 Fulton et al. (1987) 的工作,希望透過切比雪夫排列法的指數收斂與快速轉換等性質對大範圍的海洋進行精準的模擬;整合這兩種數值方法的優點

後,我們將可建立一套兼具精確性及適應性的計算方法:在邊界層區域利用沉浸邊界法給定模式所需的邊界條件,並在大範圍的海洋定義域中使用切比雪夫排列法節省計算資源且保持計算精確度。

二、研究方法

沉浸邊界法可依照固體邊界對於流體強迫機制(Artificial forcing)給定的不同區分為許多的種類,它的廣義定義是所有在固體邊界內加入網格點(沉浸邊界)進行計算的數值方法,具有不需將模式網格點配置配合邊界幾何形狀即可給定適當邊界條件進行良好數值模擬的特性,這類方法對於邊界的存在有著全

新的定義，邊界在此僅視為給定流體人造力使流體運動受到阻礙的網格點而不再是傳統認知中流體運動的終點，並藉由這個人造力的量值輾轉定義出邊界條件，故此類方法不需調整模式網格點使其與邊界相符即可給定良好的邊界條件。本文延續 Tseng et al. (2003) 的工作，使用虛網格沉浸邊界法 (Ghost Cell Immersed Boundary Method) 給定模式邊界條件。

切比雪夫多項式的定義為 $T_n(x) = \cos(n * \cos^{-1} x)$ ，故當模式網格點 X_j 定義在 $X_j = \cos(\frac{j\pi}{n})$, ($j = 0, 1, \dots, n$) 時切比雪夫多項式將可套用快速傅立葉轉換的計算方法享有快速轉換以及指數收斂等優點且不受週期邊界條件的限制，是一個相當強大的計算工具。由數學上，我們可證明切比雪夫多項式具有正交性質：

$$\langle T_m, T_n \rangle = \frac{\pi}{2} c_n \delta_{mn}, c_n = \begin{cases} 2, n = 0 \\ 1, n > 0 \end{cases} \quad (1)$$

故我們可定義出切比雪夫內積：

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (2)$$

藉由 (2) 式，我們可定義切比雪夫轉換對：

$$\widehat{\psi}_n = \frac{2}{\pi c_n} \langle \psi, T_n \rangle, n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\psi}_n T_n(x) \quad (4)$$

其中 $\widehat{\psi}_n$ 表示波譜係數。在模式中計算空間微分時，我們會先藉由 (3) 式將函數值由物理空間轉換至波譜空間，在波譜空間進行微分運算後再由 (4) 式將結果轉換回物理空間，此即為所謂的切比雪夫排列法。我們在海洋模式中邊界層以外的區域使用切比雪夫排列法以增進計算效率以及精確度。

三、模式設計

海洋中的運動方程如下：

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} - w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0} \nabla P - \vec{f} \mathbf{k} \times \vec{v} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z} + A \nabla^2 \vec{v} \quad (5)$$

對 (5) 式取旋度並僅考慮垂直方向，引入靜力平衡近似後我們可得到海洋渦度方程式：

$$\frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla \vec{\zeta} - v\beta + \vec{k} \cdot \nabla \times \left(\frac{\tau_0}{H\rho_0} \right) - K\vec{\zeta} + A\nabla^2 \vec{\zeta} \quad (6)$$

即海洋渦度的變化是由非線性渦度平流、行星渦度平流、風應力渦度 (Wind stress vorticity)、底部摩擦力 (Bottom friction) 以及側邊摩擦力 (Lateral friction) 等項所控制。為了釐清海洋動力的物理機制以及測試欲使用數值方法的收斂速度，我們利用一維非線性施托梅爾模式 (1-D nonlinear Stommel Model) 進行檢驗，控制方程如下：

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + u_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = -K \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \tau \quad (7)$$

假設 (7) 式中平均流 u_1 為常數，並利用 $x^* = \frac{1}{L}x$ 、 $\psi^* = \frac{\beta}{\tau L} \psi$ 以及 $t^* = \beta L t$ 等無因次參數，我們可將 (7) 式無因次化得到：

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} \right) + \frac{u_1}{\beta L^2} \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*3}} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} = -\varepsilon \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} - 1 \quad (8)$$

其中 $\varepsilon = \frac{K}{\beta L}$ 為無因次化的邊界層厚度。在 (8) 式中調整平均流 u_1 量值，我們即可測試非線性項對於無因次流函數的影響；此外，穩定態時，(8) 式在無平均流的條件下具有解析解：

$$\psi^* = C * e^{-\frac{x^*}{\varepsilon} - 1} - x^*, C = \frac{1}{e^{-\frac{1}{\varepsilon} - 1}} \quad (9)$$

利用 (9) 式，我們將分別檢驗切比雪夫排列法以及沉浸邊界法的收斂速度。

在設計二維模式時，為了簡化二維空間中高次微分的計算，我們使用二維淺水方程式取代 (6) 式作為模式控制方程，分別設計線性與非線性模式，進而探

討非線性項對於西方邊界流的影響。二維線性淺水方程如下：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - Ku + A\nabla^2 u + \tau \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - Kv + A\nabla^2 v \quad (11)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{\phi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (12)$$

二維非線性淺水方程式則為：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - Ku + A\nabla^2 u + \tau \quad (13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - Kv + A\nabla^2 v \quad (14)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + (\bar{\phi} + \phi) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (15)$$

其中 u 、 v 與 ϕ 分別代表東西向速度、南北向速度以及重力位高度。線性與非線性模式中皆假定風應力 (τ) 僅為緯度的函數，利用餘弦函數設計低緯東風中緯西風的理想風場，並依照西方邊界流生成的理想背景條件給定模式參數¹。所有模擬皆在中緯度 β 平面下進行，模式中東西及南北定義域皆設定為 4000 公里，時間積分使用四階容庫法 (Runge-Kutta 4th Order Method)；並依照空間微分方法及邊界條件給出的不同分為三類實驗：實驗一將使用切比雪夫排列法搭配上固體邊界條件 (Wall boundary condition)，實驗二則使用二階中差分法 (2nd Central difference method) 配合沈浸邊界法，實驗三則會整合切比雪夫排列法與沈浸邊界法。各實驗在初始時皆僅由風應力所驅動，分別積分至穩定態 (Steady state)。

四、一維非線性施托梅爾模式

為了釐清非線性項對於西方邊界流的作用，我們將 (8) 式中 u_1 的範圍設定在 $-0.1 \left(\frac{m}{s}\right)$ 與 $0.02 \left(\frac{m}{s}\right)$

¹ $f=4 \cdot 10^{-4} \left(\frac{1}{s}\right)$, $\beta=2 \cdot 10^{-11} \left(\frac{m}{s}\right)$, $\tau_0 = 1 \left(\frac{N}{m^2}\right)$, $H=200(m)$, $\rho_0 = 1013 \left(\frac{kg}{m^3}\right)$, $K=10^{-6} \left(\frac{1}{s}\right)$, $A=10^2 \left(\frac{m^2}{s}\right)$

之間進行五組實驗；空間微分使用切比雪夫排列法給定固體邊界條件進行運算，個別使用 64 個配置點 (Collocation point)，時間積分法使用四階容庫法積分至 1000 秒達穩定解，實驗結果如圖 1 所示。故我們可發現非線性項對於西方邊界層的寬度與強度均有顯著的影響；平均流向東時非線性項作用將使西方邊界流強度減弱、區域拓寬，反之，向西的平均流則會使西方邊界流強度增強、區域縮小。故我們可發現非線性項的作用在於能量的重新分配，對於西方邊界流是個亦敵亦友的角色。

我們更進一步分析切比雪夫排列法與沈浸邊界法的收斂速度；在無平均流的 (8) 式中分別利用切比雪夫排列法搭配固體邊界條件以及二階中差分法配合沈浸邊界法計算空間微分，時間積分同樣使用四階容庫法積分 1000 秒達穩定態，最後利用 (9) 式計算各方法在不同空間解析度中的方均根誤差，結果如圖 2 所示。故我們可發現切比雪夫排列法具有指數收斂的性質，在計算上較中差分法更為迅速、精確，可有效的節省計算資源；而二階中差分法使用沈浸邊界法計算精確度雖較使用固體邊界條件為差，但亦可保有二階的收斂速度。

五、二維線性輻散模式

建立在二維線性淺水方程架構下，我們利用切比雪夫排列法搭配上固體邊界條件進行空間微分的計算，在東西以及南北方向分別使用了 72 個配置點；時間積分法使用四階容庫法積分至 15 天達到穩定態。以橫軸表示東西方向，縱軸表示南北方向，模式輸出結果如圖 3 至圖 5 所示。由圖 3 可發現東西向速度場呈現南北反對稱的趨勢，北邊為正 (向東) 南邊為負 (向西)。由圖 4 可明顯發現南北向運動僅在靠近西方邊界處有極值，其餘區域皆相對靜止；此外，西方邊界流區域南北向速度場呈現南北對稱的情形，而極值位在於邊界則是因為固體邊界條件僅限制縱軸上東西方向速度場為零的關係。由圖 5 可發現重力位高度呈現西高東低且南北對稱的趨勢，與過去的研究相符。

接續同樣的參數設定，我們改以二階中差分法搭配沈浸邊界法進行模擬，於東西及南北方向分別使用了 256 個網格點，時間積分同樣使用四階容庫法積分

至 15 天達到穩定態，結果如圖 6 至圖 8 所示。故我們可發現兩種數值方法均可模擬出一致的結果。

六、二維非線性輻散模式

接續著線性模式的模式設計，我們利用與線性模式相同的參數設計以及網格點配置計算二維非線性淺水方程；空間上分別使用切比雪夫排列法搭配固體邊界條件以及二階中差分法配合沉浸邊界法進行兩組不同的實驗，時間積分法皆使用四階容庫法積分至 15 天達到穩定態。以橫軸為東西方向，縱軸為南北方向，模式輸出結果如圖 9 至圖 14 所示。由圖中可發現兩種數值方法亦可獲得一致的結果，並可發現加入非線性項後，線性結果中顯現的對稱性在各個場中皆消失了；這與一維非線性施托梅爾模式中得到實驗結果一致：非線性項扮演了重新分配能量的角色，將能量往平均流向東的區域集中，使得模式輸出的東西與南北向速度場極大值區域皆傾向北邊界，重力位高度場同樣有向北延伸的趨勢。

七、切比雪夫排列法搭配沉浸邊界法

延續著前面實驗的參數設計，我們結合了切比雪夫排列法與沉浸邊界法模擬二維線性淺水方程，方法如下：將模式東西向定義域於 1000 與 3000 公里處拆解為三部分，中心以切比雪夫排列法進行模擬，兩側則以二階中差分法搭配沉浸邊界法進行模擬；在定義切比雪夫配置點後以最靠近邊界兩個配至點的距離作為兩側二階中差分法的東西向網格間距，並設定各子定義域在東西方向交錯兩個網格點，利用內差的方式互相提供邊界條件。且為了讓模式中的能量能夠保守，除互換邊界條件外，我們藉由將通量差值均勻分配到二階中差分法邊界上的方式使得左右兩定義域間的通量達到一致。左側模式在東西與南北方向上皆使用了 16 個切比雪夫配置點，右側模式則在東西與南北向分別使用了 55 與 256 個網格點進行模擬，時間積分法使用四階容庫法；但由於中央與兩側子定義域間南北向網格解析度與數值方法收斂速度差異過大的關係（圖 2），模式合併邊界處之誤差將不連續，故有誤差累積，導致數值不穩定產生，進而使得子定義域無法透過交換邊界條件進行穩定運算，故模式無法穩定積分至 15

天。下面所展示的皆為模式積分 32 小時的結果，如圖 14 與圖 15 所示。同樣的，我們可發現與前面線性模式中相同的對稱性質，但由於尚非穩定解，故細部結構仍有差異。

八、結論

西方邊界流的生成是物理海洋中的經典問題，在此我們不深入探討其成因，僅藉由前人研究之動力機制作為模式控制方程，試圖提出一套嶄新的計算方法。在研究中我們發現非線性動力會造成海洋中能量的重新分配，進而影響西方邊界流的強度與寬度，並且提供了海洋南北不對稱的動力機制；而羅士比波的傳遞機制則為海洋東西不對稱性的成因。此外，由於切比雪夫排列法以及二階中差分法搭配沉浸邊界法兩者之南北向網格解析度與收斂速度差異過大的關係，合併邊界處之誤差不連續將導致數值不穩定的發生，使得整合模式無法穩定運算；雖藉由控制各子定義域間之通量量值相等以及降解析度使兩種數值方法精確度接近皆可有效延長穩定積分時間，但仍無法完全抑制不穩定的產生。

未來我們將嘗試由控制方程之差分格式整合數學與數值問題，致力於提高模式運算的穩定度，使得兩種數值方法得以穩定結合。

九、參考文獻

- Fulton, S.R., and W.H. Schubert, 1987: Chebyshev spectral methods for limited-area models. part I: model problem analysis. *Mon. Wea. Rev.*, **115**, 1940-1953.
- Haltiner, G.H., and R. T. Williams, 1980: Numerical prediction and dynamic meteorology. Wiley press, 477 pp.
- Pedlosky J., 1987: Geophysical Fluid Dynamics. Springer press, 709 pp.
- Pond, D. P., and G. L. Pickard, 1983: Introductory Dynamical Oceanography. Pergamon press, 329pp.
- Tseng, Y.-H., J. H. Ferziger, 2003: A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *J. Comput. Phys.*, **192**, 593-623

十、附圖

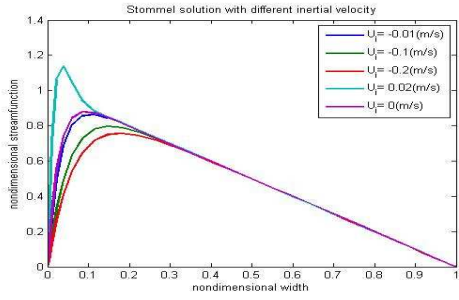


圖 1 不同平均流下一維非線性施托梅爾模式穩定解。可發現非線性動力對西方邊界流的作用相當顯著。

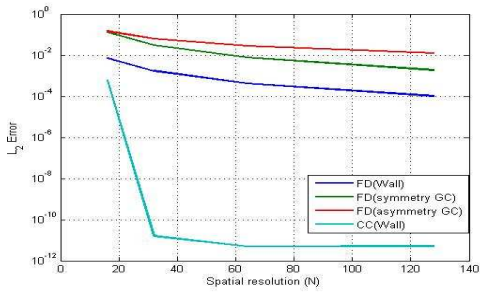


圖 2 各類數值方法收斂速度比較。圖中縱軸為方均根誤差(對數座標)，橫軸為空間中計算所使用的點數。FD 表示二階中差分法，CC 表示切比雪夫排列法。

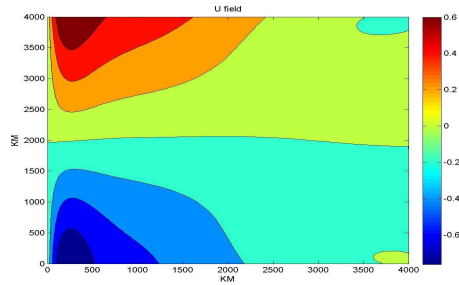


圖 3 切比雪夫排列法模擬之東西向速度場，單位為 $\frac{m}{s}$ 。

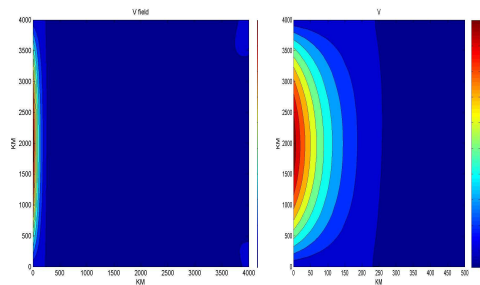


圖 4 切比雪夫排列法模擬之南北向速度場，左圖為海洋整體，右圖為西邊界流區域。單位為 $\frac{m}{s}$ 。

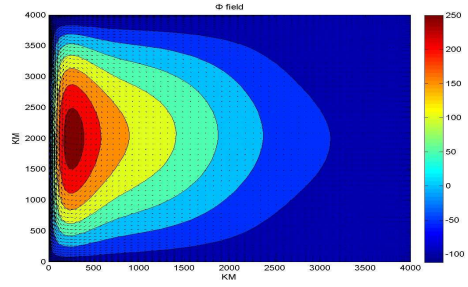


圖 5 切比雪夫排列法模擬之重力位高度場(色階)，箭頭表示運動方向，單位為 $(\frac{m}{s})^2$ 。

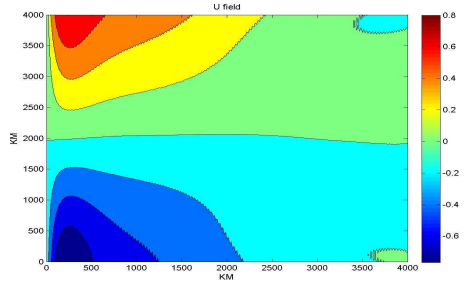


圖 6 二階中差分法搭配沉浸邊界法模擬之東西向速度場。單位為 $\frac{m}{s}$ 。

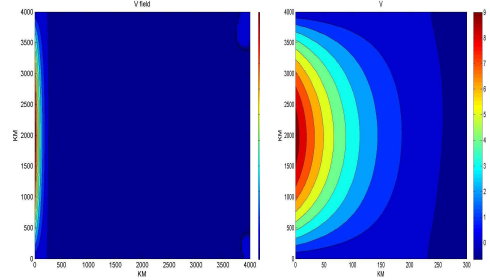


圖 7 二階中差分法搭配沉浸邊界法模擬之南北向速度場，左圖為海洋整體，右圖為西邊界流區域，單位為 $\frac{m}{s}$ 。

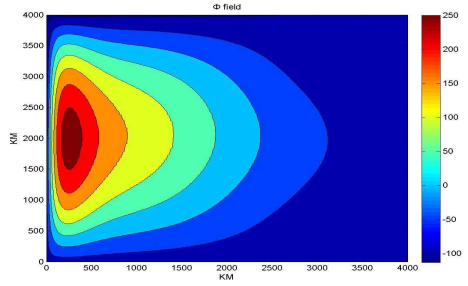


圖 8 二階中差分法搭配沉浸邊界法模擬之重力位高度場，單位為 $(\frac{m}{s})^2$ 。

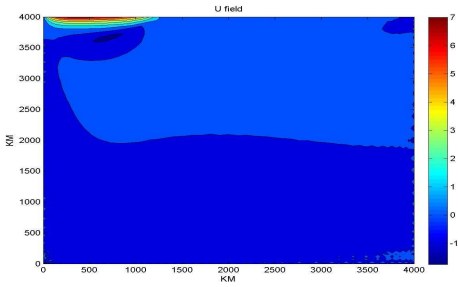


圖 9 切比雪夫排列法模擬之東西向速度場，單位為 $\frac{m}{s}$ 。

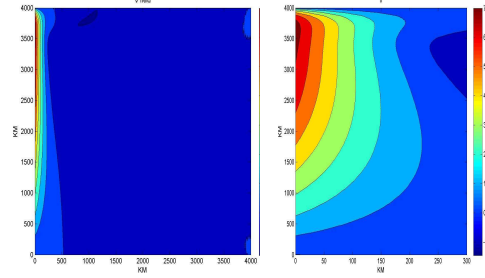


圖 13 二階中差分法搭配沉浸邊界法模擬之南北向速度場，左圖為海洋整體，右圖為西邊界流區域，單位為 $\frac{m}{s}$ 。

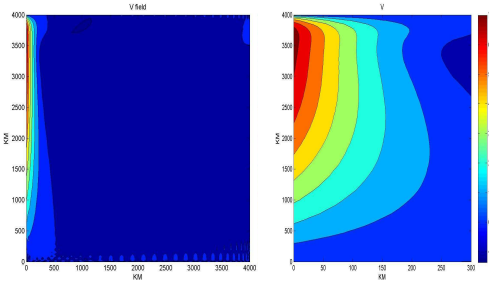


圖 10 切比雪夫排列法模擬之重力位高度場（色階），箭頭表示運動方向，單位為 $(\frac{m}{s})^2$ 。

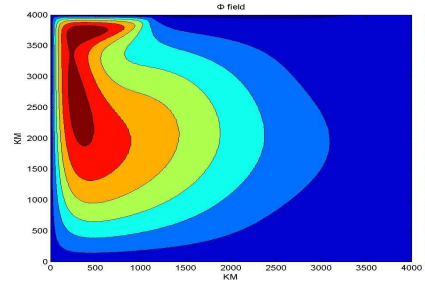


圖 14 二階中差分法搭配沉浸邊界法模擬之重力位高度場，單位為 $(\frac{m}{s})^2$ 。

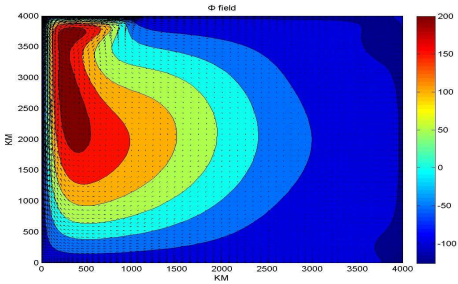


圖 11 切比雪夫排列法模擬之重力位高度場（色階），箭頭表示運動方向，單位為 $(\frac{m}{s})^2$ 。

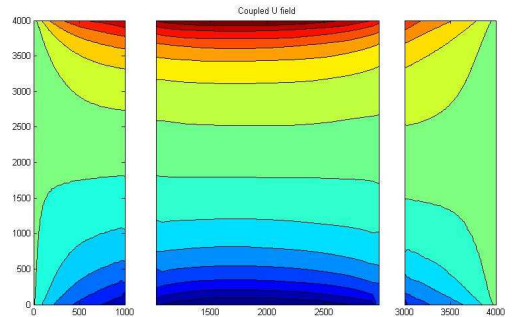


圖 15 東西向速度場，中央為切比雪夫排列法的結果，左、右則為二階中差分法搭配沉浸邊界法的輸出，單位為 $\frac{m}{s}$ 。

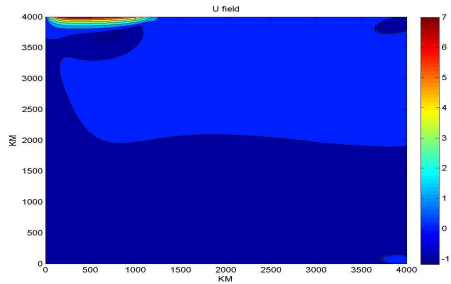


圖 12 二階中差分法搭配沉浸邊界法模擬之東西向速度場。單位為 $\frac{m}{s}$ 。

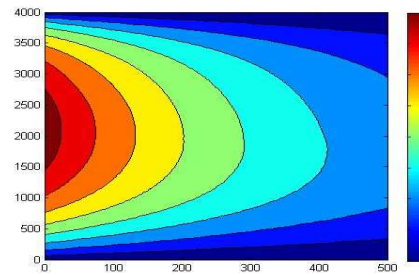


圖 16 南北向速度場，擷取西方邊界流區域，單位為 $\frac{m}{s}$ 。