最少假設之溼大氣模式研究

許家瑋 郭鴻基

國立台灣大學大氣研究所

一. 前言

在過去80年間,人們試著利用大氣模式來模擬 大氣運動狀態,其中精確度一直是模式中最被關 注的議題。一開始,利用最原始的運動方程來描 述大氣是最爲適當的方法,因爲可避免在模擬過 程忽略一些重要物理現象,進而能忠實反應大氣 實際狀況,但是存在系統中的聲波,使計算效率 大爲降低。爲避免此現象,許多學者在過去研 究中分別在大尺度以及對流尺度使用不同的簡化 法,但是簡化卻也使模式被限制在一些附加條件 下才得以更精確的模擬大氣變化。

隨著電腦技術以及數值方法不斷進步,目前, 聲波問題已經可以利用數值方法來解決,因此在 近年的對流尺度模擬上,已經可以使用較少假設 的可壓縮系統(Fully compressible)來作雲尺度 的模擬。至於在大尺度方面,因爲水平尺度大於 垂直尺度很多可使用靜力平衡近似,如此一來就 可濾除垂直聲波也不會過於簡化,不過這樣的近 似只能使用在大尺度模擬上。

近幾年,由於大尺度以及對流尺度的交互作 用現象被廣泛討論,許多學者開始同時兼具大尺 度以及對流尺度的模擬,因此能夠同時模擬兩 個尺度的模式在近年也變成一個不可忽視的研究 領域。關於這樣的模式建立,Ooyama (1990) 的溼大氣模式以及Arakawa and Konor (2008)的 非彈性近似 (Anelastic) 和準靜力平衡 (Quasistatic) 整合系統,都是建立在可以模擬大小尺度 現象的前提上。

此篇研究的目的,是對於上面所提到的整 合系統做進一步的模擬討論,所挑選的系統是 由Ooyama (1990)所提出的溼大氣模式。這個 模式所具有的優勢在於熱力預報上的精確度,不 同於以往系統會對於經過轉換或假設的熱力參數 做預報,此模式直接對於亂度 (entropy) 這個較 原始的熱力參數做預報,減少因轉換過程的假設 造成與實際大氣的誤差,增加在溼大氣情況時熱 力預報上的精確度。另外,在預報方程上,主要 是對乾空氣密通量、水及水氣密度通量、動量通 量和亂度通量做預報,而壓力在此系統中則是一 個診斷的參數,也因此使得這個系統在垂直坐標 上可以利用高度坐標整合非靜力及靜力平衡兩種 模擬,使兩種不同模擬中唯一的差別,只需變換 垂直動量密度預報的運算順序。而這樣的做法其 實就是在模式中分成動力以及熱力兩個部份,以 分別模擬。

此篇研究中,利用不同的波譜方法做測試, 並比較不同的波譜法所造成的差異,而由於挑 選的模式是一做最少假設的濕大氣系統,因此 前面所提到因聲波所造成的問題需格外注意, Ooyama (2001)已利用半隱法 (Semi-implicit method)來解決聲波的問題。 此篇研究則是 進一步利用Crank-Nickolson配合三階的Adams-Bashforth的離散法,使摩擦項的模擬可加入原始 方程中,以比較將原本使用濾波器扮演消散次網 格能量的角色,改成加入摩擦項表現同樣的物理 機制後會有何差異。

二. 大氣模式回顧

大氣的變化即爲空氣流體所表現的運動型態, 因此流體力學的進步在大氣模式的基礎中佔著 舉足輕重的地位。 首先,尤拉第一次運用偏微 分方程,提出可以完整描述流體運動的系統,利 用這樣的基礎,隨著電腦以及數值模擬的出現, 人們不再需要用人工來解一個可能無解析解的偏 微分方程,而是利用數值方法及電腦的機械式邏 輯思考來解決一個流體運動問題,也因此大氣模 式在數值方法及電腦的長足進步下也有了顯著的 進展,也自此大氣科學成爲一個可以做實驗的科 學。

在大氣模式的崛起後,學者們發現,流體中

的聲波(Acoustic wave)成為使用數值方法時的 障礙。由於其頻率大於在氣象中所關注的運動 情形,因此原本所關注的變化情形(Fig.1 紅虛 線),在疊加了因聲波所造成的高頻震盪後會呈 現Fig.1的藍線變化情形,



Fig.1 為任意物理場(紅盧線)及疊加聲波後(藍線)隨時間(橫軸) 的變化情形,如果無聲波可以用長時步積分(長錄)得到場量隨時間 變化的結果,但是疊加聲波後只能用短時步積分(短錄)以防模式不 穩定積分。

使得在作時間積分時,必須考慮因聲波的存在而 造成積分時步(Time step)大小被限制的情形, 在數值中稱為CFL condition

$$\frac{C_{fastest}\Delta t}{\Delta x} \le 1 \tag{1}$$

這樣的限制使得利用電腦做運算時變得非常沒有 效率,所以在以往的許多研究中,大致可以分為 兩種解決方法來對聲波做忽略或是簡化的處理, 方法的挑選則取決於關注問題所佔的空間尺度為 何。

第一種方法是對於大尺度而言,利用其關注的 問題在水平尺度上大於垂直尺度非常多的特性, 我們可以套用靜力平衡近似,

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \tag{2}$$

如此在垂直方向上聲波就可以被濾除,但是這樣 無法濾除在水平上聲波的傳遞(Lamb wave)情 形。

第二種方法是對於較小尺度而言,利用在 連續方程上的簡化,使得大氣流體變成一非彈 性的流體,這樣的方法我們稱之爲非彈性近似 (Anelastic approximation) ,

$$\nabla(\rho v) = 0 \tag{3}$$

所以聲波無法在經過這樣簡化的系統之中傳遞, 因而解決聲波造成積分沒有效率的問題,但這 樣的簡化卻造成模擬時多了一些額外限制。為了 使這樣的系統依然能維持能量的保守性,Ogura and Phillips (1962) 第一次提出這樣的減化法時 強調,大氣條件必須符合在垂直上呈現等熵分佈 才能使能量保守性存在,因此在使用上造成可以 模擬的實際情形被限制。

由前面對各尺度模式的分析可以瞭解,大小 尺度上的差異,使得在挑選使用的模式時,需清 楚瞭解所關注問題在模式上的尺度表現,才不會 因為不正確的模式挑選而導致不穩定產生,進而 造成模擬結果誤差。 但是在近年,許多研究指出 在大小尺度間的交互作用扮演著重要角色, 也 意味著大氣中的問題不再是兩個可以個別分開 模擬的尺度現象,而是需要考慮因尺度交互作用 而一起模擬的大氣系統, 面對這樣的問題,由 於數值方法在近年的發展,有學者提出可以利用 數值方法的改善配合原始方程來進行模擬, 減 少簡化系統造成的誤差,而模擬尺度被限制的 情形,則利用時間分離法(Time spliting),或 是半隱法 (Semi-implicit method) 來縮短計算時 間以解決積分無效率的狀況。 另外在近年,也 有一些新提出的系統可以進行這樣大小尺度模擬 的整合, 聲波問題的部份則是看各系統的性質 來選擇解決方法。接著將會簡單介紹近年所提出 的兩種系統, 一個是由Ooyama (1990, 2001) 所 提出的溼大氣模式,另一個則是由Arakawa and Konor (2008) 所架構的非彈性和準靜力近似整 合系統。

三. 模式介紹

在此研究中所使用的模式,是前一節所提 及Ooyama (1990, 2001)提出的溼大氣模式,首 先就這個模式的構成做介紹,在控制方程部份, 預報方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial Uu}{\partial x} + \frac{\partial Uw}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial Wu}{\partial x} + \frac{\partial Ww}{\partial z} + g\rho + \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma u}{\partial x} + \frac{\partial \sigma w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta u}{\partial x} + \frac{\partial \eta w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi u}{\partial x} + \frac{\partial \xi w}{\partial z} = 0$$

其中

$$\rho = \eta + \xi, \quad u = \frac{U}{\rho}, \quad w = \frac{W}{\rho}$$

其中U、W為水平及垂直的動量通 量, σ 、 η 、 ξ 則分別爲亂度通量、乾空氣密 度通量、以及水加水蒸氣的密度通量,所 以在此系統之中有八個方程式,包括五個 預報參數(η , ξ , σ , U, W),四個診斷 參數(ρ , u, w, p),在輸入部份,初始 給與 η , ξ , σ , U, W, 接著每一個時步所 算出的預報值診斷每個時間的診斷參數 (T, p, ξ vapor, ξ condensate</sub>)。在熱力診斷部 份,加入兩個方程使得整個系統呈現熱力閉合系 統,此兩方程主要作用爲判辨在 ξ 的部份,水氣 和凝結出的水各佔的密度爲何。用亂度與溫度及 密度之間的關係式 $\sigma(\eta,\xi,T)$ 加上疊代法,可得到 兩種溫度,分別爲假設飽和及假設未飽和的溫度 值,判斷何狀況爲眞,由下面分析可知

$$\begin{cases} T_1 > T_2 \text{ (if unsaturated) then,} \\ \eta_v = \eta, \ \eta_c = 0 \end{cases}$$
$$T_1 < T_2 \text{ (if saturated) then,} \\ \eta_v = \eta^*(T), \ \eta_c = \eta - \eta_c \end{cases}$$
$$T = max(T_1, T_2)$$

當眞實情況未飽和時,假設為未飽和狀況下算 出的T₁是正確的,而這時另一假設為飽和所求出 之溫度T₂在物理上的意義則為溼球溫度,因為眞 實情況並未飽和,但是假設飽和的結果,就如同 供給水直至飽和,這時的溫度,其實與溼球溫度 的意義相同,爲了使其飽和,不斷蒸發吸收原本 應有的熱能,也就強迫原本應有溫度T₁下降,所 以真實情形為未飽和時 $T_1 > T_2$ 。另一個狀況是 真實情況爲飽和,在假設飽和狀況下算出的 T_2 是 正確的,但另一假設未飽和所求出的溫度 T_1 在物 理上的意義爲過飽和(supersaturated)而未有水 汽凝結時的溫度,因真實爲飽和狀態,卻需呈 現未飽和的情形,使原本應該凝結而釋放能量的 水需維持水汽的狀態,所以真實情形爲未飽和時 $T_2 > T_1$ 。由上面分析可發現溫度較大值即爲真實 溫度,同時透過這樣的診斷,可以瞭解當時情況 爲飽和或未飽和,進一步求得密度及壓力。

四. 研究方法與實驗結果

實驗中利用兩種波譜方法進行 模擬比較,一種是Fourier-Chebyshev(水 平Fourier、垂直Chebyshev)波譜法,由Kuo and Cheng(1999)提出,有一部份討論將會以此模 式當作對照組進行比較。另一種則是使用Double Chebyshev(水平與垂直皆使用Chebyshev)波譜 法。首先,利用Fourier-Chebyshev波譜法,做一 個實際例子的模擬,來看Ooyama提出的模式表現 情形,在實驗設計上,平均場部份

$$\begin{cases} \bar{T}(z) = 293.15 - \frac{g}{C_p d} z \quad (k) \\ \bar{\xi}(z) = 1.275 \frac{\bar{T}(z)}{293.15} \frac{\bar{C}_{d} d}{R_d} \quad (kgm^-3) \\ \bar{\eta} = 0 \quad (kgm^-3) \end{cases}$$

在擾動場部份

$$T'(x,z) = \Delta T \exp\left[-\left(\frac{x-1250}{200}\right)^2\right] * \\ \exp\left[-\left(\frac{z-625}{200}\right)^2\right] (k) \\ \xi'(x,z) = \bar{\xi}(z) \left(\frac{\bar{T}(z)}{T(x,z)} - 1\right) (kgm^{-3})$$

此實驗是測試一熱乾氣胞上升的情形,在一開始 先假設其已經達成聲波上的平衡,因此在平均及 擾動場的假設是溫度改變反應在密度上,而不是 在壓力上,因此並不會因爲有壓力密度而產生聲 波,造成還要先達到聲波平衡才能看到氣塊上升 的情形。



Fig.2 圖隨時間依序為左上(150 s)、右上(300 s)、左下(450 s)、右 下(600 s),可以看到隨著時間一乾氣塊上升對流的情形。

在模擬結果部份,可以看到一完整的熱胞對流 過程,總共經過8000個時步積分,所以進一步, 將波譜方法改變成Double Chebyshev,看其模擬 情形。

Double Chebyshev 的方法中,有 Tau 及 Collocation兩種方法可選擇,因此本研究將對於這兩 種方法進行討論。 在第一個實驗之中,不使用 濾波器來濾除能量往小尺度傳送的現象,觀察兩 種方法結果以進行討論。第二個實驗,爲了維持 Tau方法穩定性,加入濾波器解決次網格能量累 積現象,並與原本無使用濾波器比較,進一步將 Tau 加濾波與 Collocation 無濾波做比較。第三個 實驗,利用 Tau 加入濾波與 Collocation 未濾波 結果做不同例子比較。最後一組實驗,因爲人工 加入濾波器的不眞實性,將原本利用濾波器來濾 除能量往小尺度傳遞而累積的現象,改用較眞實 的渦流摩擦項來表示。

第一個實驗,無濾波器測試,模擬設定在平均 場部份

$$\begin{cases} \bar{T}(z) = 293.15 - \frac{g}{R_d} z \ (k) \\ \bar{\xi}(z) = 1.1478 \ (kgm^-3) \\ \bar{\eta} = 0 \ (kgm^-3) \end{cases}$$

在擾動場部份

$$T'(x,z) = \Delta T \exp\left[-\left(\frac{x-1250}{200}\right)^2\right] * \\ \exp\left[-\left(\frac{z-1250}{200}\right)^2\right] (k)$$

在擾動場初始值的設定上故意只在溫度上有擾動,由於溫度並未跟壓力場達到平衡,因此出現 聲波調節的過程。



Fig.3 壓力擾動場在1.8秒(上)及2.4秒(下)時的分佈,左圖為Tau method 右圖為Collocation method。

首先在Tau與Collocation兩種Chebyshev的波 譜方法中可以發現,在都沒有濾波的狀況下, 可以看到聲波很快速向外傳遞的現象,在經過一 波震盪後,可以發現氣胞中心的風場結構已經出 現受浮力作用而產生氣胞上升的情形,不過 Tau 方法積分到2.4秒之後,在下邊界的地方會出現風 場不正常的震盪形式,再繼續積分就會產生模擬 不正確的情形,總共只能積分約160個時步。

考慮到模式中並無法模擬能量流向小尺度而被 摩擦消耗的現象,因此能量會在波譜空間的高波 數部份產生累積,造成模擬不正確,Fulton and Schubert (1987)對於這樣的現象,提出爲避免 波譜能量在Nyquist波長 (約2 Δx , Δx 爲空間解析 度)的累積現象,一方面也爲了表現能量傳遞到 模式中不可解析尺度後,應該會被摩擦消耗的物 理現象,有雨種方法可以使用, (1)加入正比於 物理場量Laplacian的渦流耗散項, (2)加入一 濾波器移除在高波數的能量累積現象。

因此, 第二個實驗首先依照Kuo and Cheng (1999)利用Fourier-Chebyshev波譜法, 在其模式中加入Lanzos濾波器的概念,本實驗也 同樣加入Lanzos濾波器到Double Chebyshev Tau 的波譜法中,來看其與未加濾波器時的比較, 模擬的初始條件則如同第一個實驗的聲波調節過



Fig.4 壓力擾動場在18秒(上)及120秒(下)時的分佈, 左圖為 Tau method 加濾波器, 右圖為 Collocation method 無濾波器。

在比較之中可以發現原本只能積分到 2.4 秒的 Tau 方法可以積分更久而不會有能量累積造成模 式無法解析的情形,因此進一步跟沒有加濾波器 的 Collocation 方法做比較, 由 Fig.3 可以發現 在同樣初始條件下持續積分,壓力場的配置雖然 並不完全相同,但是在風場上的表現卻差不多, 值得一提的是在加入濾波器之後,三秒之內聲波 震盪的情形,變得比原本沒加濾波器時的情形要 劇烈許多,不過在可積分總時步數上,從原本的 160 個時步增加到 4800 個時步。

在第三個實驗中,透過模擬另一個例子,來看 加入濾波器的 Tau 方法和未加濾波的 Collocation 方法之比較。此例子的初始場設定與一開始利 用Fourier-Chebyshev波譜法所模擬的例子設定相



同,也就是一乾氣塊上升的過程

Fig.5 亂度擾動場在60秒(上)及120秒(下)時的分佈, 左圖為 Tau method 加濾波器, 右圖為 Collocation method 無濾波器。

同樣比較兩種方法在氣塊上升時的不同處, 可以發現90秒前的情形幾乎一樣,但是再積分下 去,可以發現利用 Collocation 方法的模擬產生氣 塊變形的狀況,而 Tau 方法則是沒有這方面的問 題,主要原因是使用 Collocation 方法時,無法移 除能量往小尺度傳遞的現象。使用 Collocation 方 法時,並不像 Tau 方法是在波譜空間做計算,可 以將能量不斷擴散到更小尺度的部份,直接由波 數截斷上忽略,Collocation 方法是在物理空間做 運算,因此對於能量往小尺度分布的現象無法忽 略,而呈現不斷將原本應該無法模擬的次網格能 量分佈到可解析網格之中,而在此例子(乾空氣 上升)的時間積分上,因一開始是假設聲波調節 已平衡的狀態,所以比模擬聲波調節的例子又可 以積分更長時間,總時步將近 8000 個時步。

前面是對於使用濾波器作的探討,而面對能 量累積的現象,還有另一方法可以解決此問題, 也就是最後一個實驗,加入一個正比於物理場 量Laplacian的渦流摩擦項,不過為了避免因這項 摩擦效應加入而使得時步被限制的更小,因此將 原來的控制方程改成另一種離散型式。原方程為

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = f + \kappa \nabla^2 \phi$$

離散化後

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi n}{\Delta t} = A + \frac{\kappa}{2} \nabla^2 (\phi^{n+1} + \phi^n)$$
$$A = \frac{23}{12} f^n - \frac{16}{12} f^{n-1} + \frac{5}{12} f^{n-2}$$

最後可以簡化成Helmholtz方程

$$(\frac{2}{\kappa\Delta t} - \nabla^2)\phi^{n+1} = (\frac{2}{\kappa\Delta t} + \nabla^2)\phi^n + \frac{2}{\kappa}A$$

φ為任意物理量,在摩擦項使用 Crank-Nicholson ,是利用 implicit method 的特性來使模式不會 趨於不穩定,而A項則是除了摩擦項以外,其 他影響物理場變化的離散項,這裡則是利用三階 Adam-Bashforth 來離散化,最後就可以利用求 解 Helmholtz 方程來得到下一個時間點的物理場 量。

五. 討論與結論

在所提到的四個實驗中,第一個實驗可知,在 使用Chebyshev Tau方法時,考慮到能量累積在高 波數的現象,應該要加入濾波器來維持模式的穩 定性。

第二個實驗,比較有無使用濾波器之差異可 以發現,套用濾波器後,確實增加在積分上的穩 定性,不過其結果取決於濾波器的型式,因此使 用濾波法後,在聲波的調節上與原本有很大的差 異,由原本很快的聲波傳遞後就可以看到氣塊上 升的現象,變成氣塊呈現不斷震盪的型式。不過 將積分時間增加的實驗中,利用 Tau 方法使用濾 波與 Collocation 法未用濾波做比較,可以發現 點 就壓力上的分布型式不甚相同,不過觀察風場形 式可以發現大致上的情形相差並不太大,因此在 濾波器的使用上,是可以接受的。

接著繼續利用這兩種方法做比較,在第三個實 驗中,模擬乾氣塊上升的情形,可以發現積分到 較長時間時, Collocation 方法因爲會將無法解析 能量散佈到可解析空間的情形,也就是Aliasing現 象,因此在本實驗之中並不適合使用。

最後,面對能量累積的現象,還有另一個解 決方法,就是在原本的控制方程中加入渦流摩擦 項來使能量可以被消耗,而不會有能量累積在高 波數的現象,因此在加入摩擦項後,利用Crank-Nicholson配合三階Adam-Bashford的方法,可以 把原本的預報方程簡化成求解Helmholtz方程式來 計算下一個時步的物理場。對於這個方法與使用 濾波器的比較還有待更進一步的研究。

六. 參考文獻

Arakawa, A., and C. S. Konor, (2008): Unification of the anelastic and quasi-Hydrostatic system of equations. Mon. Wea. Rev., 137, 710-726.

- Durran, D. R., (1988): Improving the anelastic approximation. J. Atmos. Sci., 46, 1454– 1461.
- Durran, D. R., (1990): The third-order Adam-Bashforth method: an attractive alternative to leapfrog time differencing. Mon. Wea. Rev., 119, 702–720.
- Duchon, C. E., (1979): Lanczos filtering in one and two dimensions. J. App. Met., 18, 1016–1022.
- Fulton, S. R., and W. H. Schubert, (1987): Chebyshev spectral methods for limited-area models. Part I: model probem analysis. Mon. Wea. Rev., 115, 1940–1953.
- Fulton, S. R., and W. H. Schubert, (1987): Chebyshev spectral methods for limited-area models. Part II: shallow water model. Mon. Wea. Rev., 115, 1954–1965.
- Kuo, H. C., and C. T. Cheng, (1999): Experiments with a spectral convection model. TAO, 10, 651–691
- Kuo, H. C., and R. T. Williams, (1997): Scaledependent accuracy in regional spectral methods Mon. Wea. Rev., 126, 2640–2647
- Ogura, Y., and N. A. Phillips, (1961): Scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere J. Atmos. Sci., 173–179
- Ooyama, K. V., (1990): A thermodynamic foundation for modeling the moist atmosphere J. Atmos. Sci., 47, 2580–2592
- Ooyama, K. V., (2000): A dynamic and thermodynamic foundation for modeling the moist atmosphere with parameterized microphysics J. Atmos. Sci., 58, 2073–2101