國立台灣大學大氣科學研究所碩士論文

指導教授：郭鴻基 博士

球面二維亂流探討

研究生：蔡禹明 撰

中華民國九十五年六月

國立台灣大學大氣科學研究所

碩士論文考試

所　　長　陳正平

指導教授　郭鴻基

考試委員

李清勝

柯文雄

郭鴻基

楊明仁

吳俊傑

日期　95 年 6 月 26 日

摘　要

太陽系中的類木行星，由可見光照片可看出其表面有明顯緯向帶狀的結構，以及大渦旋存在；地球中緯度的高層區域存在著西風噴流，顯示帶狀噴流是行星風系的重要特徵之一。此動力特徵和球面上二維亂流合併的過程，以及背景的行星渦度梯度有關，系統的經向尺度受到萊茵斯尺度（Rhines scale）限制，緯向尺度可無限制成長，最終形成帶狀的結構，甚至出現如大紅斑的大渦旋。

地球上存在著渦旋與地形，二者皆會造成局部的位渦擾動，不同的地方在於：渦旋會移動，地形則靜止。本文延續前人的研究，使用全球波譜模式為研究工具，進一步探討渦旋與地形對於噴流結構的影響。研究結果顯示：（1）渦旋與地形的附近均出現西風加速的現象；地球上常出現如：颱風、青康藏高原東側之背風氣旋等高能量聚集的渦旋，其存在對於地球上盛行的行星風帶可能有增強的效應。（2）在植入特定結構之渦旋的實驗中，初始植入渦旋附近出現明顯環繞整個緯度圈的帶狀噴流，其經向方向上的寬度為萊茵斯尺度，出現之正壓不穩定波動滿足在比克萊東風噴流環境下發生之正壓不穩定，渦度帶的緯向波長約為經向寬度的 4 倍。（3）植入渦旋造成局部區域之西風加速，以北半球來說，將在西風帶南側出現碎波區（surf zone），而在渦旋附近出現最大之向北位渦通量。（4）渦旋對於亂流的組織能力與渦旋結構有關。（5）植入緯向的地形有助於緯向渦度帶之生成。（6）規則地形（軸與經緯線平行的地形），有助於動能在較短時間內反串跌到大尺度，約可減少一半的時間。（7）要模擬出完整的能量波譜分佈解析度至少需為 T60。

關鍵詞：二維亂流、球面諧函數、萊茵斯尺度。

致　謝

時光荏苒，轉眼間來到台大已經五年了，回想大一時的種種，仍鮮明地印在腦海裏，恍如昨日。台大，是我最喜歡的學校；動力與模擬研究室，是我最喜歡的實驗室。研究生的生活，很充實亦很忙碌，感覺時間過得飛快；我想，將來我會懷念這段該做的事與想做的事加起來，永遠也做不完的日子。

本論文的完成，首先要感謝指導老師郭鴻基教授。深深佩服老師豐富的學識和作研究認真的態度，在老師的指導下常讓我體會到求知的喜悅；並提供絕佳的研究環境及設備，使我能專心致力於研究工作。感謝口試委員：柯文雄教授、李清勝教授、吳俊傑教授及楊明仁教授給予的寶貴建議，使本論文更為完整。感謝系上多位教授平日的教導與照顧。感謝陳建河學長寫出這麼棒的模式，並回答我許多問題，讓我獲益良多；謝謝姿伶學姊開始時教我如何跑模式；謝謝李耀學長、小芬學姊對於研究及學業的幫忙；謝謝珮雯學姊提供許多程式上的協助；感謝 vv 幫我美化二維能量波譜的分析圖，並仔細幫我檢查論文，提供許多寶貴的建議。謝謝豪章和憶婷提供許多 matlab 程式讓我參考；謝謝理寰和彥志幫忙解決許多電腦的問題，與你們討論課業常使我獲益良多。嘉鴻和穎雯，祝你們將來研究順利。大三時感謝李清勝教授讓我進入颱風實驗室學習。謝謝龍耀學長、雍嵐與惟然學長，和嘉美學姊的照顧及幫忙。特別感謝人鳳與嬿竹學姊解答我許多的問題，並分享許多經驗。謝謝鏡芸學姊、大頭學長、小明、智文和班上的同學，在我大二車禍受傷時的照顧。忙碌的助教映宜和國豐，你們辛苦了。颱風動力實驗室的水母和翔儀，祝妳們未來順利！怡君、建寬、小驊、怡均、秀君，很高興這段日子有你們陪伴，希望你們未來研究及工作順利。遠在紐西蘭的表弟欣揚，每次來台灣總帶來無限的歡樂，期待下次見面。國中時代的好友，

六人行的聚會，總讓我玩得很盡興，感覺時光飛逝。謝謝雙 CPU 的 *Jacobi* 不捨晝夜地幫我跑模式，你是一台很棒的電腦！

登山，是這段日子我最喜愛的休閒活動。玉山、雪山、奇萊、北大武山、武陵四秀，到台北近郊的名山：七星山、觀音山、大屯群峰、北插天山等，都有我的足跡。喜歡立於山巔之上，那無垠的視野與飄渺的空間感；喜歡山中自然、單純又帶點神秘的氛圍；愛欣賞每座山的奇、險、峻、秀，伴隨著光影和雲彩幻化之絕色風采。研一的暑假在瑞士，見識到由冰河切割出的歐洲阿爾卑斯山脈磅礡的氣勢：白朗峰（*Mt. Blank*）、少女峰（*Mt. Jungfrau*）、僧侶峰（*Mt. Mönch*）、艾格爾峰（*Mt. Eiger*）、以及瑞士的代表性山岳，著名的三角巧克力——馬特洪峰（*Mt. Matterhorn*）。這些名山讓我大開眼界，讚嘆於造物主之神工鬼斧。山，豐富了我的生活，並使我成長。

最後，感謝我的家人提供優良的成長環境，並一路支持我完成碩士學位。何其有幸，能生在這樣一個——精彩的時代。

感謝天主。

蔡禹明

2006. 7. 17.

目　錄

圖　錄

第一章　前言

太陽系中的類木行星，即木星、土星、天王星和海王星，由它們的可見光照片可分辨出明顯緯向噴流的型態。以木星為例，它的半徑為71,492 公里，是地球的 11.22 倍；而它的自轉週期為 9.92 小時，是地球的 0.41 倍。因此，相對於地球來說，木星是一個體積龐大，且自轉快速的行星。另外，木星是一個主要由氣體構成的行星，大氣層相當深厚。圖 1.1 是航海家 2 號（Voyager 2）在接近木星時所拍攝的照片，圖中清楚顯示木星表面緯向結構的噴流，東、西風交錯分佈。圖 1.2 是用哈伯太空望遠鏡（Hubble Space Telescope, HST）所拍攝的土星照片，同樣顯示許多緯向帶狀的結構。

同樣地，地球上中緯度高層地區存在著西風噴流，類似於木星與土星表面所看到的緯向帶狀結構。世界氣象組織（WMO）對於噴流的定義為：長度尺度在千公里，寬度尺度在百公里，其中任取之速度下限為 $30\,ms^{-1}$的區域稱為噴流。

Huang and Robinson（1998）（以下簡稱 HR98），使用正壓模式在球面上植入二維亂流。結果顯示，在物理空間及波譜分析中，渦度場及能量場均呈現緯向分佈的現象。這是由於球面上具有行星渦度梯度的緣故，使系統在經向方向上的成長受到萊茵斯尺度（Rhines scale）的限制，而在緯向方向上能持續成長。綜合以上所述，我們感興趣的是這些緯向帶狀結構動力上形成的機制。

地球上有高渦度聚集的渦旋，以及地形分佈，HR98 的工作中並未探討地形與渦旋對於噴流結構的影響。圖 1.3 及圖 1.4 分別為 2005 年 8 月 17 日 0900Z 和 2005 年 8 月 31 日 1200Z 的紅外線衛星雲圖，資料來

源為中央氣象局衛星中心。在圖 1.3 中，大部分的區域都沒有明顯的系統，僅於低緯度地區有些零星對流擾動；在圖 1.4 中，左側是強烈颱風泰利，右側是強度達超級強烈颱風（category 5）的娜比颱風。其周圍由於颱風外圍的下沈氣流，大氣是相當穩定無雲的。由此可知，大氣中能量的分佈有時較為零散破碎，集中於中小尺度的對流系統中；有時集中於某些較大尺度的系統中，例如颱風。由氣候統計，自 1983 年以來，每年全球平均約有 85 個颱風（Webster et al., 2005），圖 1.5 為 1970-2004 年共 34 年間，全球風暴數目之時間序列；假設每個颱風生命期約為 8 天，則平均每天全球約有 1.86 個颱風。我們將探討渦旋這種高渦度聚集的區域，對於噴流結構造成的影響。另一方面，由於近期工商業急遽發展，有學者認為將造成氣候變遷，全球暖化，颱風將變得更強、更多，我們也將探討這樣的現象對於緯向噴流造成的影響。此外，地球上存在著許多山脈地形，我們亦將探討地形對於噴流結構的影響。

本文延續 HR98 的工作，使用全球模式探討地形與渦旋對於緯向噴流結構的影響，希望能進一步幫助我們瞭解地球上的行星風系。本文組織架構如下：第二章為近期理論工作回顧與詮釋，所使用的全球模式將在第三章中作介紹，第四章為植入渦旋之實驗，第五章為植入地形之實驗，第六章為討論與總結。

第二章　理論工作回顧與詮釋

2.1　二維亂流的性質

在一個立體的水槽中注滿水，接著注入一些墨水，經過一段時間後，墨水經由擴散作用在空間中呈不規則的分佈，這樣的流體可視為三維亂流。若將同樣的水槽置於一個旋轉的轉盤上，墨水最後會聚集在柱狀的空間中，這種現象稱為泰勒柱(Taylor column)，圖 2.1 為 Montgomery（2003）實驗所攝得的照片。觀察其結構顯示，垂直方向的結構相較於水平方向的結構是較單純的，可視為二維亂流。因此，流體在強層化，即水平尺度遠大於垂直尺度，或在強旋轉的環境下，可視為二維的結構。

f plane 上，正壓強旋轉的二維亂流，其風場可以流函數（streamfunction，ψ）的型式表示，$u=-\partial\psi/\partial y$，$v=\partial\psi/\partial x$。在考慮黏滯作用的情況下，其基本方程式如下：

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\nu\nabla^2\zeta \qquad (2.1)$$

$$\zeta=\nabla^2\psi \qquad (2.2)$$

（2.1）式為正壓渦度預報方程式，等號左側第二、三項可合寫成 $J(\psi,\zeta)$，其中 $J(\cdot,\cdot)$ 稱為亞可比算子（Jacobian operator），故（2.1）式等號左側第二、三項為渦度平流項，等號右側為黏滯項，其中 ν 為黏滯係數（viscosity coefficient）；（2.2）式則為渦度和流函數之間的關係式。

動能（kinetic energy），以 E 表示；渦度擬能（enstrophy），以 Z 表示；palinstrophy，以 P 表示。定義如下：

$$E=\iint \frac{1}{2}\nabla\psi\cdot\nabla\psi\, dxdy \tag{2.3}$$

$$Z=\iint \frac{1}{2}\zeta^{2}\, dxdy \tag{2.4}$$

$$P=\iint \frac{1}{2}\nabla\zeta\cdot\nabla\zeta\, dxdy \tag{2.5}$$

將正壓渦度方程式（2.1）式乘上$-\psi$，並利用（2.2）式，可得到：

$$\begin{aligned}\nabla\psi\cdot\nabla\frac{\partial\psi}{\partial t}-\nabla\cdot\left(\psi\nabla\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial y}\zeta\right)&\\ +\frac{\partial}{\partial y}\left(-\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}\zeta\right)&=\nu\nabla\cdot(\zeta\nabla\psi-\psi\nabla\zeta)-\nu\zeta^{2}\end{aligned} \tag{2.6}$$

將（2.6）式對整個區域做積分，並假設邊界通量項沒有任何貢獻；有許多方法可使邊界通量項消失，如使用：雙週期性邊界條件、封閉區域且垂直於邊界之速度分量為 0、東西方向使用週期性邊界條件，且經向速度在南北邊界上為 0。可得到：

$$\frac{dE}{dt}=-2\nu Z \tag{2.7}$$

此為動能定理（energy principle）。由於$\nu>0$且$Z>0$，因此黏滯項總是扮演衰減動能的角色。同理，將（2.1）式乘上ζ，並對整個區域做積分，可得到：

$$\frac{dZ}{dt}=-2\nu P \tag{2.8}$$

此為渦度擬能定理（enstrophy principle），由於$\nu>0$且$P>0$，因此黏滯項總是扮演衰減渦度擬能的角色。

當流體ν很小的時候，近似於無黏滯性。這時渦度會被拉伸成細絲狀，流體的渦度梯度值（$|\nabla\zeta|$）很大，由（2.5）式，palinstrophy 的值

變得很大，因此，（2.8）式等號右側成為有限數量級的項，渦度擬能隨時間串跌（cascade）。經過一段時間後，當渦度擬能很小，而ν也很小，則（2.7）式等號右側的項近乎為 0，因此動能隨時間近乎保守。這種動能近似於保守，而渦度擬能隨時間串跌的現象，是二維亂流一個重要的性質，稱為「二維亂流之選擇性衰減」（selective decay of 2D turbulence）。

圖 2.2 為 Kuo et al.（2004）使用非輻散正壓模式，模擬雙渦旋交互作用，對黏滯係數ν的敏感度測試，顯示 KE（動能）、EN（渦度擬能）和 palinstrophy 隨時間變化的情形。圖中橫軸為時間，縱軸為相對於初始值的百分比。在ν很小的情況下，如圖中實線所示，初始 palinstrophy 隨時間增加，是攪動（stirring）的過程，此過程在大氣中可由不穩定（instability）、颱風，或亂流來產生；過了最大值後隨時間減少，是混合（mixing）的過程。而由上圖，渦度擬能隨時間持續遞減，動能近似於保守，顯示二維亂流選擇性衰減的現象。此實驗結果驗證了 Batchelor（1969）與 Tennekes（1978）之理論推測。

Kuo et al.（2004）以因次分析的觀點，解釋「選擇性衰減」，考慮強旋轉的流體，風場近似於地轉風：

$$u \sim \frac{\Delta p}{l} \tag{2.9}$$

動能可表示成：

$$E \sim u^2 \sim \frac{\Delta p^2}{l^2} \tag{2.10}$$

渦度擬能藉由（2.10）式可表示成：

$$Z \sim (\frac{u}{l})^2 \sim \frac{\Delta p^2}{l^4} \sim \frac{E}{l^2} \tag{2.11}$$

其中，Δp 為壓力擾動，l 為系統尺度的大小。由於動能近似於保守，由

（2.10）式，Δp 及 l 的變化同步，即當系統尺度 l 增加時，Δp 也必需成比例地增加，也就是大渦旋較強，小渦旋較弱。同時，渦度擬能要出現串跌的現象，由（2.11）式，系統的尺度 l 必定要增加，Z 才能遞減，即渦旋將不斷地合併。故平均而言，二維亂流在受到平流動力影響下，將變成尺度較大，強度較強，為數較少的渦旋。此理論可解釋 McWilliams（1984）的實驗結果，如圖 2.3 所示。

二維亂流在波數空間中，動能與渦度擬能將朝相反方向移動，動能往低波數（大尺度）的方向移動，渦度擬能往高波數（小尺度）的方向移動，此結果之證明如下：假設 $\nu = 0$，在初始場中 $E(n)$ 之最大值出現在 $n = n_1$，隨著時間，動能在波數空間的分佈將有所改變，因此：

$$\frac{d}{dt}\int (n-n_1)^2 E(n)dn > 0 \qquad (2.12)$$

由於動能和渦度擬能皆保守，因此：

$$\frac{d}{dt}\int E(n)dn = 0 \qquad (2.13)$$

$$\frac{d}{dt}\int n^2 E(n)dn = 0 \qquad (2.14)$$

將（2.12）式展開並利用（2.13）及（2.14）式：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big[\int n^2E(n)dn - 2n_1\int nE(n)dn + {n_1}^2\int E(n)dn\Big]& \\ = -2n_1\frac{d}{dt}\int nE(n)dn > 0&\end{aligned} \qquad (2.15)$$

將（2.15）式和能量守恆（2.13）式做結合，可得到：

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\int nE(n)dn}{\int E(n)dn}\right] < 0 \qquad (2.16)$$

（2.16）式顯示系統運動，能量聚集的波數隨時間將減少，代表平均來

說，能量往大尺度移動。

另一方面，渦度擬能往高波數之方向移動，可使用相似的方法證明，能量之分佈隨時間有所改變，因此：

$$\frac{d}{dt}\int (n^2 - {n_1}^2)^2 E(n)dn > 0 \qquad (2.17)$$

同樣地，利用動能以及渦度擬能保守，將（2.17）式作展開：

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\int n^4 E(n)dn - 2{n_1}^2\int n^2 E(n)dn + {n_1}^4\int E(n)dn\right]\\&\qquad = \frac{d}{dt}\int n^4 E(n)dn > 0\end{aligned} \qquad (2.18)$$

定義 $Z(n) = k^2 E(n)$，並將（2.18）式和渦度擬能守恆（2.14）式結合，可得到：

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\int n^2 Z(n)dn}{\int Z(n)dn}\right] > 0 \qquad (2.19)$$

（2.19）式顯示系統運動，渦度擬能聚集的波數（平方）將隨時間增加，代表平均來說，渦度擬能往小尺度移動。值得注意的是，以上的證明包含了二個性質：保守性（conservatism）和不可逆性（irreversibility）。（Schubert, 2001）

2.2 萊茵斯尺度（Rhines scale）

地球上高低緯度間具有旋轉的差異，因此科氏參數（Coriolis parameter）f 會隨著緯度而改變。圖 2.4 中的風場顯示這樣的現象，在較高的緯度，由於 f 較大，因此由北往南的氣流，其向右偏轉的程度，較從赤道附近，由南往北的氣流向右偏轉的程度大。

二維亂流隨時間會合併成較大尺度的渦旋，當系統尺度因合併不斷地增加，將逐漸感受到背景的行星渦度梯度，而產生β羅士比波能量頻散（β Rossby wave energy dispersion）將能量由系統中帶走，系統尺度及強度不會無限制成長。Rhines（1975）定義這個最大的尺度稱做萊茵斯尺度（Rhines scale），並經由尺度分析，得到：

$$k_{\beta}^{R}=\left(\frac{\beta}{V_{rms}}\right)^{1/2} \qquad (2.20)$$

其中k_{β}^{R}是以波數表示的萊茵斯尺度，V_{rms}是整個區域中速度場的均方根（root mean square）：

$$V_{rms}\equiv\left[\frac{\iint |v|^{2}\,d\hat{\Omega}}{\iint d\hat{\Omega}}\right]^{1/2} \qquad (2.21)$$

是對整個球面做積分，其中v是速度向量，$\hat{\Omega}$是立體角（solid angle）。由（2.20）式顯示，以長度尺度來說，萊茵斯尺度與V_{rms}成正比，而與β成反比。低緯度地區β較中高緯度大，因此k_{β}^{R}較大，長度尺度的萊茵斯尺度較小。另外，對球體來說，由於只有經向方向上存在行星渦度梯度，因此萊茵斯尺度僅存在於經向方向上，緯向方向由於沒有萊茵斯尺度，系統的成長沒有限制，可形成帶狀的結構，因此，萊茵斯尺度是不等方向性的（anisotropic）。

在亂流動力學中，渦度擾動經合併增大尺度與強度，從而感受到β效應，產生能量頻散；但在非線性效應顯著之情形下，正壓渦旋可藉由非線性效應自我維持，不被能量頻散明顯減弱，這可由β羅士比數（β Rossby number）：

$$R_{\beta}=\frac{V}{\beta r^{2}} \qquad (2.22)$$

來決定（McWilliams and Flierl, 1979）。其中V和r分別是系統的速度及空間尺度，R_β是一個無因次化參數（non-dimensional parameter）。β羅士比數是渦度方程式中，非線性項和線性渦旋羅士比波頻散項的比值。當R_β小於1時，能量頻散主宰整個系統；當R_β的數量級為1時，非線性效應顯得重要，渦旋可以自我維持，抵抗能量頻散的效應，系統強度將持續增強或尺度將繼續成長，例如颱風。

萊茵斯尺度也可由羅士比波的時間尺度，與平移的時間尺度二者做比較來得到。我們知道羅士比波的頻率為：

$$\omega = \frac{-\beta m}{m^2 + l^2} \qquad (2.23)$$

其中m為緯向波數，l為經向波數。令$K^2 \equiv m^2 + l^2$為總波數平方，假設$K \sim m$，在不考慮方向的情況下，頻率可寫成如下的型式：

$$\omega \sim \frac{\beta}{K} \qquad (2.24)$$

因此，羅士比波的時間尺度（T_R），可表示成下式：

$$T_R \sim \frac{K}{\beta} \qquad (2.25)$$

我們知道系統平移的時間尺度（T_A），是平移距離除以平均速度：

$$T_A = \frac{L}{\bar{u}} \sim \frac{1}{\bar{u}K} \qquad (2.26)$$

當羅士比波的時間尺度等於平移的時間尺度時，也就是$T_R = T_A$時，

$$\frac{K}{\beta} = \frac{1}{\bar{u}K} \qquad (2.27)$$

經推導，可得：

$$K = \left(\frac{\beta}{\overline{u}}\right)^{1/2} \tag{2.28}$$

假設$\overline{u} = V_{rms}$時，（2.28）式與（2.20）式相同，K就是波數型式的萊茵斯尺度。而當$T_R < T_A$時，可得到$K < (\beta/\overline{u})^{1/2}$。因此，在$K < (\beta/\overline{u})^{1/2}$的大尺度中，由於羅士比波的時間尺度小於平移的時間尺度，因此是由羅士比波主宰的區域，伴隨波動的能量頻散會減弱系統。

由（2.23）式推算羅士比波的相速率，並考慮平均緯向西風，可知長波向東之移速較慢，短波向東之移速較快。在球面上由於系統南北（經向）方向上的尺度受到萊茵斯尺度限制，系統多呈東西（緯向）方向分佈，緯向波數趨近於 0，因此向東移動緩慢。這也是為何分析氣候，以及處理氣候模擬的結果常使用緯向平均，因為緯向方向上移動較緩慢，變化較不顯著；經向方向上移動較快，同時有行星渦度梯度以及太陽輻射量的變化，較多重要的現象。

HR98 以能量波譜（energy spectrum）分析亂流的觀點，推導正壓渦度方程式中非線性項與β項的平衡關係，提出以波數平面之相位圖來詮釋萊茵斯尺度。過程如下：羅郝波（Rossby-Haurwitz wave）頻率為$\omega_n^m = -2m[n(n+1)]^{-1}$，其中$m$是緯向波數，$n$是總波數；亂流頻率為$\sigma_n^m \approx KV_{rms}$，由 Boer（1983）之定義，水平總波數$K = [n(n+1)]^{1/2}$，因此，$\sigma_n^m \approx [n(n+1)]^{1/2} V_{rms}$；而萊茵斯尺度是定義在當$\left|\omega_n^m\right| \approx \sigma_n^m$，由此可推導出：

$$\frac{2m}{[n(n+1)]^{3/2}} \approx V_{rms} \tag{2.29}$$

在給定整個區域中均方根速率的情況下，可在由m及n構成的二維波數平面上畫出一條曲線，如圖 2.5。圖中的曲線，稱做萊茵斯曲線（Rhines curve），在曲線上方波數較高，尺度較小的區域，是亂流（turbulence）

主宰的區域；其下方的區域則是由羅士比波主宰，伴隨著能量頻散將能量由系統中帶走。曲線右側的數字為均方根速率（ms^{-1}），顯示均方根速率與萊茵斯尺度成正比。而由低緯向波數主要由亂流所主宰的現象，顯示萊茵斯尺度具有不等方向性的性質。綜合上述，萊茵斯尺度是在球面上，給定V_{rms}的情況下，系統在經向方向上所能擁有最大的尺度。

HR98 使用正壓模式，模擬衰減亂流（decaying turbulence），驗證上述關於能量波譜的理論。將正壓渦度方程式（2.1）式等號右側黏滯項改為高階擴散項（higher-order diffusion）。在$n = 35 - 45$之間的所有緯向波譜係數給定亂數（random number），製造亂流為初始場，模式積分 80 天，取十組實驗的系集平均（ensemble average）。圖 2.6 為實驗所得到的二維能量波譜，顯示能量聚集在一個類似漏斗形狀的區域中，顯示動能反串跌至低緯向波數的緯向調和波（zonal harmonics），因此，能量多聚集在緯向結構中。

他們接著以衰減亂流的實驗結果當作初始場，進行永久緯向噴流（persistent zonal jets）的實驗，模擬至最終狀態（end state）。在（2.1）式等號右側加入強迫作用（forcing），以及艾克曼線性曳力（Ekman linear drag）。如此渦度有源（source）和匯（sink），使系統中能量不會變化太大，最終將達成平衡恆定狀態（equilibrium steady state）。這裡所使用的強迫作用為一階馬可夫過程（first-order Markov process），根據 Lilly（1969），其標準型式如下：

$$F_{i+1} = RF_i + \hat{A}(1 - R^2)^{1/2} r_a \qquad (2.30)$$

其中，F_i 以及 F_{i+1} 分別為現在，與下一個時步的強迫值（forcing value），$R \equiv (1 - \Delta t / 2\tau_F)/(1 + \Delta t / 2\tau_F)$，$\Delta t$ 是時步間隔，τ_F 為強迫無相關時間（forcing decorrelation time），通常設為一天，$\hat{A}$ 是強迫振幅（forcing amplitude），r_a 是介於0到1之間的亂數。為了分析上的方便，這種強迫

作用只作用在總波數等於 55 的波譜係數上，且不包含最小緯向波數的波。圖 2.7 為初始能量不同的 8 組實驗，時間平均緯向平均緯向風的實驗結果。由左到右是初始能量由大到小，橫軸座標上，一個間隔為 $1\,ms^{-1}$，顯示能量愈大的實驗，最終產生出的噴流強度愈強，數量愈少。這是因為系統中能量愈強，則均方根速率愈大，由（2.20）式，萊茵斯尺度也愈大，因此系統在經向方向上可發展成較大的尺度，而整個球面上面積是固定的，因此最終所產生的噴流數量較少。實驗Ⅰ所得到的結果類似地球上行星風帶的分佈。

二維亂流使用一維能量波譜法分析也顯示出其特性。由科莫平衡定理（Kolmogorov equilibrium theory），定義 ε 為單位質量動能的串跌率，透過因次分析，可推導出：

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3} n^{-5/3} \qquad (2.31)$$

接著，定義 η 為單位質量渦度擬能的串跌率，同樣由因次分析，可推導出：

$$E(k) = C'\eta^{2/3} n^{-3} \qquad (2.32)$$

其中 C 與 C' 為常數。由（2.31）式及（2.32）式，在雙對數座標（log-log coordinate）上，動能與渦度擬能串跌的能量波譜，將分別以 $-5/3$ 及 -3 的斜率呈現。圖 2.8 為 Vallis and Maltrud（1993）(以下簡稱 VM93)，所提出的能量波譜示意圖。圖中橫軸為波數，左側是大尺度，右側是小尺度，圖中黑色實線代表能量波譜。初始在中小尺度的區域給能量，隨時間，動能將以 $n^{-5/3}$ 的比例向大尺度反串跌，當尺度超過萊茵斯尺度後，能量由 β 羅士比波帶走；另一方面，渦度擬能將以 n^{-3} 的比例向小尺度串跌，最後被黏滯項消耗掉。分析系統的一維能量波譜，可顯示系

統能量聚集在大尺度的現象，並可幫助我們瞭解系統是否已達成穩定平衡。

2.3　地形造成的影響

地形的存在，造成其周圍水深變淺。根據位渦守恆方程式：

$$\frac{D}{Dt}\frac{\zeta + f}{h} = 0 \qquad (2.33)$$

其中h是水深。考慮f相同的情況下，由於地形周圍h變小，相對渦度ζ也要減小，因而產生了背景的渦度梯度，因此，同樣也有萊茵斯尺度存在。圖 2.9 為 VM93 使用 f plane 區域淺水模式，植入一餘弦函數形狀的地形，峰頂位於中線處，所得到最終經向風的結果。上圖為時間平均的經向風，黑色代表最大南風值，白色代表最大北風值。模擬中出現的經向帶狀噴流，其緯向的尺度就是萊茵斯尺度。下圖為時間平均，經向平均的經向風，顯示地形左側出現南風，地形右側出現北風，而噴流的尺度約略與地形尺度相等。

考慮在北半球 f plane 上的情況，由相對渦度的配置我們知道，在地形的左側將出現南風，右側將出現北風，如圖 2.10 的示意圖所示，這樣的理論可以解釋圖 2.9 下圖的實驗結果。同理，對於緯向分佈的地形，在其北方應出現西風，南方應出現東風。然而，若此緯向分佈的地形坐落於赤道上時，由於跨越赤道科氏參數變號的緣故，所得到的結果是在地形南北方均出現西風，而在地形上方出現東風。

考慮在同一緯度，有地形的情況下，會在地形上方出現駐波（stationary waves）。對駐波來說，其線性化後的位渦保守方程式如下：

$$\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi + \beta\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{f_0}{H}\bar{u}\frac{\partial h_T}{\partial x} \qquad (2.34)$$

其中$\bar{u}$為平均緯向風，ψ為流函數，h_T為地形高度，這裡考慮一餘弦函數形狀的地形：

$$h_T(x,y) = \mathrm{Re}[h_{\max}\exp(ikx)]\cdot\cos ly \qquad (2.35)$$

其中Re[ ]表示取中括弧內的實部，$h_{\max}$是地形高度的最大值。經過推導後，滿足位渦保守的擾動流函數場為：

$$\psi(x,y) = \frac{f_0 h_{\max}}{H(K^2 - \frac{\beta}{\bar{u}})}\cos kx\cdot\cos ly \qquad (2.36)$$

其中H為平均水深，$K^2 \equiv m^2 + l^2$，是水平波數的平方和。考慮$K^2 - (\beta/\bar{u}) < 0$的情況，$\beta$相對來說重要，根據位渦方程式以及因為是駐波，山頂地方的流體永遠維持位渦大，山下的流體永遠維持位渦小，山下的流體被帶上山需要供給位渦，若尺度夠大則由經向的行星渦度平流供給。因此，在地形上方所生成的波動是長波，由（2.35）式及（2.36）式可知地形h_T與流函數ψ的分佈是反相位（out of phase）的關係，如圖2.11 所示。另一種說法是h大的地方f大，h小的地方f小，因此流體在過山的過程中位渦並沒有改變。

同樣地，考慮$K^2 - (\beta/\bar{u}) > 0$的情況，$\beta$相對來說較不重要，氣流過山需要藉由緯向的相對渦度平流以維持局部地區的位渦守恆。因此，在地形上方所生成的波動是短波，由（2.35）式及（2.36）式可知地形h_T與流函數ψ的分佈是同相位（in phase）的關係，如圖 2.12 所示。圖 2.10 之示意圖是考慮在f plane 上的流體，因此，地形上方出現的負渦度可由圖 2.12 解釋。另外，當$K^2 - (\beta/\bar{u}) = 0$時，也就是剛好在萊茵斯尺度的時候，（2.36）式的分母為0，會產生特異性（singularity）。由物理觀點，由於處於平移主宰體系與羅士比波主宰體系的交界上，此不連續的性質造成特異性。

Charney-Eliassen model 為一模擬地形羅士比波的淺水模式，Held

（1983）使用此模式，並在渦度方程式中加入邊界層曳力（boundary layer drag），使最終反映出的擾動重力位高度場的相位移動，而避免特異性的產生。模式中所植入的地形如圖 2.13 下圖所示，是經過平滑處理後 45°N 的地形剖面。上圖實線為模擬擾動重力位高度場（$\equiv f_0\psi/g$）的結果，由於加入邊界層曳力，擾動重力位高度場的槽（trough）相對於地形的脊（ridge）有向東$1/4$個週期的偏移，若不考慮此偏移，則擾動重力位高度場與地形間是反相位的關係，代表是由經向的行星渦度平流供給氣流過山所需的位渦。虛線為一月份 45°N ，500 百帕擾動重力位高度場的觀測結果。由二者型態吻合的程度顯示，雖然這是一個簡單的動力模式，卻可將觀測值主要的型態模擬出來。

Grose and Hoskins（1979）在線性化後的淺水模式中植入理想的緯向風場 SR（super-rotation），此緯向風場具有等角速度的性質，在赤道地方風速最強，為$15\,\mathrm{ms}^{-1}$，緯向風隨緯度的變化由圖 2.14（a）中的空心圓圈表示。接著在 30°N 的地方植入一個直徑為 45°的圓形地形，最終的擾動渦度場分佈如圖 2.14（b）所示。顯示在地形下游處出現正渦度，此結果與 Held（1983）的模擬與觀測結果相同。並顯示一連串向東南方傳遞的波列。

葉等人分析 1975 年 5 月之平均，沿 85°E 緯向風速隨緯度之剖面，如圖 2.15 所示，圖中三角形陰影區為埃弗勒斯峰（Mt. Everest）之位置。顯示在埃弗勒斯峰附近，最大風速中心高度最低，高度在 10,000 到 11,000 公尺之間，而其北方的拉薩，上空急流軸中心高度在 12,000 到 13,000 公尺之間。此外，在 9,000 到 11,000 公尺之大氣層內，埃弗勒斯峰（包括定日）風速大於南北兩邊，反映了急流大風區的下傳，而此現象並不侷限於埃弗勒斯峰附近，沿喜馬拉雅山系一帶均出現。（葉與高等人，1988）

產生上述現象是由於高原熱源之熱力作用，由於巨大而高聳的青康藏高原，和其四周自由大氣間同樣存在著季節性的熱力差異。夏季由於高原之加熱作用，在高原北側溫度梯度為負值，南側為正值。因此，在高原北側，由太陽輻射不均造成的南北溫度梯度將增加，南側將減小；而高層西風帶主要是由地球南北之溫度梯度所造成，因此，在高原北側將造成西風加速，南側西風將減速，甚至出現東風帶，因此，在高原的上方將產生反氣旋式的環流。這樣的結果與圖 2.10，由位渦守恆及地轉平衡推導出的風場相吻合，顯示藉由動力及熱力過程皆有助於在地形上方出現反氣旋式的流場。若考慮高原加熱效應為 5℃，則由壓高公式（hypsometric equation），可計算出重力位高度場 1000-500 hPa 厚度約增加 100 公尺，則將可產生數量級約為$10\ \mathrm{ms}^{-1}$之風場變化。冬季時，在高原的上方根據以上推論將產生氣旋式的環流，與由位渦守恆及地轉平衡推導出的風場相反。因此，動力過程與熱力過程何者較為重要，值得進一步研究，未來可使用包含此二過程的模式做進一步探討。另一方面，以垂直方向來說，高大山系的加熱使大氣層結構很不穩定，有利於急流動量下傳，使大風區在高大山系附近下延。

亂流渦度場與地形交互作用所產生之時間平均狀態，目前有兩個定理可作定量分析，分別為最大亂度定理（maximum entropy theory），以及最小渦度擬能定理（minimum enstrophy theory）。最大亂度定理（Salmon et al., 1976）嚴格限制必需為無外力無黏滯之流體，由於地形造成的非線性效應將使亂度不斷增加，系統朝向亂度最大的方向發展；同時，渦度擬能藉由非線性平流效應串跌至小尺度，最終被消耗掉，因此，系統最終將朝向最小渦度擬能之狀態發展。VM93 植入地形的實驗中發現，在淺地形的環境下，最大亂度定理與最小渦度擬能定理可模擬出相同尺度之噴流，且與植入地形的尺度相近，如圖 2.9 所示；然而當地形高度增加時，將出現多個噴流的結構，噴流尺度將減小。

2.4 渦旋造成的影響

Ferreira and Schubert（1999）（以下簡稱 FS99），使用全球淺水模式，在 10°N 的地方植入 5 個半徑為 2°的渦旋，如圖 2.16（a）所示，積分 14 天後的結果如圖 2.16（b）所示，顯示渦旋往西北方向移動，因此具有向北的位渦通量。圖 2.16（c）的橫座標為緯度，縱座標為緯向平均質量權重向北位渦通量（$\overline{hP^*v^*}$），顯示渦旋存在的附近有極值出現。

$$\frac{D(\bar{u}\cos\phi+\Omega a\cos^2\phi)}{Dt}=\overline{hP^*v^*}\cos\phi \qquad (2.37)$$

其中

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\hat{v}\frac{\partial}{a\partial\phi} \qquad (2.38)$$

a為地球半徑，$\hat{v}=\overline{hv}/\bar{h}$，是質量權重緯向平均經向風，$v^*=v-\hat{v}$，$P$的符號有相同的定義。考慮同緯度的情形，（2.37）式顯示左側除$\bar{u}$外皆為常數，而右側$\overline{hP^*v^*}$在渦旋附近有正的極值出現，因此，渦旋存在的區域會造成其附近西風加速，此為渦流與平均流交互作用（eddy-mean flow interaction）的結果。

局部區域的西風加速，以北半球來說，會造成西風帶南側出現反氣旋式的環流，抵銷掉正的行星渦度。由於行星渦度隨緯度增加，因此在出現西風加速區域之南側，會出現位渦隨緯度近乎常數的情形，其兩側位渦梯度皆較大，這段區域稱為碎波區（surf zone），此區出現波動破碎（wave breaking），以及位渦等值線出現不可逆的變形（McIntyre and Palmer, 1984）。圖 2.17 為延續圖 2.16 的實驗，在緯向對稱圓形極區渦旋的背景流場中，10°N 的地方植入 5 個半徑為 2°的渦旋之實驗結果。圖中虛線為第 1 天；實線為第 15 天。（a）為緯向平均位渦隨緯度的變化；（b）為$\overline{hP^*v^*}$隨緯度的變化。由圖（a）實線，11°N 的地方位渦隨

緯度增加率較緩和，此區域即為磯波區，對照圖（b），顯示在磯波區的北側有最大向北的位渦通量，這是由於西風帶北側的風切造成正渦度之故。另外，圖（b）中點線為第 1 天與第 15 天緯向平均緯向風的差值（$\Delta\bar{u}$），與 $\overline{hP^{*}v^{*}}$ 的分佈相當地吻合，說明了渦旋造成向北的位渦通量伴隨著西風加速。

2.5　追蹤參數

所謂的追蹤參數（tracer），其實是一種被動純量（passive scalar），只會被動力場帶著走，其存在並不會改變動力場的分佈。例如在不考慮熱力過程的情況下，水氣就是一種被動純量。然其分佈卻不會與速度場完全相同，因為被動純量的擴散率（diffusivity）遠比速度場的黏滯性（viscosity）來得小，也就是在卜然托數（Prandtl number）很大的情形下。

Pierrehumbert（1999）在正壓模式中植入追蹤參數，滿足以下方程式：

$$\partial_t\Theta + \bar{u}\cdot\nabla\Theta = \kappa\nabla^2\Theta \qquad (2.39)$$

其中 Θ 是追蹤參數的值，$\bar{u}$ 是速度場，κ 是分子擴散率。圖 2.18 是被三維亂流速度場帶動的追蹤參數，最終的波譜分佈圖。顯示在平移主宰的體系中，被動純量波譜與動能波譜分佈的斜率相同，皆為 $-5/3$；而在消散主宰的體系中，被動純量波譜分佈的斜率為 -1，較動能波譜分佈的斜率 -3 來得平緩，這是因為追蹤參數的擴散率遠比速度場的黏滯性來得小，因此在小尺度的地方追蹤參數的衰減較為緩慢。

第三章　模式介紹

本研究所使用的模式，是 Kuo et al.（2001）之球面諧函數全球波譜模式（spherical harmonics global spectral model）。本研究選用全球模式來作模擬，優點是可以不需要處理邊界條件。模式中所使用的控制方程式將於 3.1 節中作介紹，3.2 節為球面諧函數之波譜方法，3.3 節為模式設計，3.4 節為模式表現之測試。

3.1　控制方程式

無外力，非線性淺水模式，其渦度場（ζ）、輻散場（D）及重力位高度偏離場（Φ'）隨時間變化的方程式如下：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \alpha(-G，-\mathrm{H}) \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \alpha(H，-G) - \nabla^2(I + \Phi') \qquad (3.2)$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = \alpha(-U\Phi'，-V\Phi') - \overline{\Phi}\mathrm{D} \qquad (3.3)$$

其中

$$\zeta = \alpha(V, -U) \qquad (3.4)$$

$$D = \alpha(U, V) \qquad (3.5)$$

$$\Phi' = \Phi - \overline{\Phi} \qquad (3.6)$$

上式中，U 和 V 為餘弦權重速度。$U = (u \cdot \cos\phi)/a$，u 是緯向風速，$a = 6370$ 公里，是地球半徑，ϕ 是緯度。$V = (v \cdot \cos\phi)/a$，v 是經向風

速。Φ 是重力位高度，$\overline{\Phi}$ 是平均重力位高度。運算子 $\alpha(A,B)$ 的定義如下：

$$\alpha(A,B)=\frac{1}{(1-\mu^2)}\frac{\partial A}{\partial\lambda}+\frac{\partial B}{\partial\mu} \qquad (3.7)$$

其中 $\mu=\sin\phi$，λ 是經度。而 G、H、I 的定義為

$$G=U(\zeta+f) \qquad (3.8)$$

$$H=V(\zeta+f) \qquad (3.9)$$

$$I=\frac{U^2+V^2}{2}\frac{a^2}{\cos^2\varphi} \qquad (3.10)$$

其中 f 為科氏參數，在 $\beta-plane$ 上 $f=f_0+\beta\cdot y$。

將（3.1）～（3.3）式利用（3.4）～（3.10）式展開可得完整的模式控制方程組：

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{-1}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial\lambda}[\frac{u\cos\phi}{a}(\zeta+f)]-\frac{\partial}{\partial\mu}[\frac{v\cos\phi}{a}(\zeta+f)] \qquad (3.11)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial t}=&\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial\lambda}[\frac{v\cos\phi}{a}(\zeta+f)]-\\&\frac{\partial}{\partial\mu}[\frac{u\cos\phi}{a}(\zeta+f)]-\nabla^2(\frac{u^2+v^2}{2}\frac{a^2}{\cos^2\phi}+\Phi')\end{aligned} \qquad (3.12)$$

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial t}=\frac{-1}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\frac{u\cos\phi}{a}\Phi')-\frac{\partial}{\partial\mu}(\frac{v\cos\phi}{a}\Phi')-\overline{\Phi}D \qquad (3.13)$$

（3.11）～（3.13）式中的非線性項，在模式中使用 Orszag（1970）發展出的波譜轉換法（spectral transform method）做處理。原因是為避免非線性項產生相位錯置（phase aliasing），造成波譜方法計算上的不穩

定，可同時提升保守性（conservatism）、準確度（accuracy）以及模式的計算效率（efficiency）。這個方法是將這些非線性項轉換回物理空間的網格點上做計算，再將結果轉換回波譜空間，接著再使用波譜方法計算其他線性的項，其效率性的優點主要來自於快速傅立葉轉換。圖 3.1 是 Bourke（1972）使用交互係數模式（interaction coefficient model）及波譜轉換模式，比較它們在不同截斷波數的情形下，模式計算一個時步所需的時間。圖中顯示，在固定截斷波數的情況下，使用波譜轉換法的模式計算一個時步所需的時間，遠小於交互係數模式所需的時間，這個實驗證明了波譜轉換法計算的高效率性。

圖 3.2 是陳（1995）根據 Leith（1980）提出的理念所繪出的流形（manifold）的示意圖。圖中橫軸代表純粹的地轉平衡，縱軸代表純粹的重力波，在不同的運動中這兩種物理過程所佔的比例不同，造成大氣中種種不同時間與空間尺度的運動現象，如圖中斜率不同的曲線所示。圖中斜線陰影的區域（即 A 部分），物理上近似於地轉平衡，屬於慢速流形（slow manifold）的運動，是由平衡動力（balance dynamics）所主宰，因此是不可逆的過程。由橫軸逐漸加大斜率傾向縱軸，則運動中重力波所佔的比例逐漸增加，傾向於快速流形（fast manifold）的運動。圖下所列的模式是能夠模擬該範圍內現象的模式。

本文中，我們感興趣的運動其空間尺度屬於行星尺度，旋轉是主要影響動力的機制，因此是屬於慢速流形的運動。在探討緯向噴流以及渦旋所造成之影響的實驗中，使用滿足正壓的物理過程，即（3.11）式，由於不考慮水深的變化，故模式中不存在重力波，無疑是屬於慢速流形的運動。而在探討地形對噴流所造成之影響的實驗中，由於有深度的變化，我們使用準平衡動力的淺水方程模式，同時需要考慮輻合輻散場，即（3.11）式～（3.13）式，重力波會存在於模式中，較傾向於快速流形的運動，因此，我們在初始化時進行非線性平衡（nonlinear balance）

過程，如下式所示：

$$\nabla^2\left[gh+\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2\right]=\nabla\cdot\left[(f+\nabla^2\psi)\nabla\psi\right] \qquad (3.14)$$

其中 h 為流體的厚度。給定初始渦度場後，可經由非線性平衡方程式（3.14）式，計算出流體厚度（h），亦可由非線性平衡方程式，從植入的風場計算出所對應的渦度場，這個過程可確保模式大致上模擬慢速流形的運動。

3.2　球面諧函數

球面諧函數（spherical harmonics），又名多極（multipoles）：

$$Y_n^m(\lambda,\phi)=(-1)^m\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}}P_n^m(\cos\phi)\cdot e^{im\lambda} \qquad (3.15)$$

其中 m 是緯向波數，n 是總波數，λ 為經度，ϕ 為緯度，P_n^m 是連帶勒壤得多項式（associated Legendre polynomials）。之所以稱作「球面諧函數」，是因為它們是在整個球面上被定義，東西方向之基本函數（basis functions）為傅氏級數（$e^{im\lambda}$），南北方向之基本函數為連帶勒壤得多項式；另一方面，拉卜拉士方程式（Laplace equation）的解被稱為諧函數，而 $Y_n^m(\lambda,\cos\phi)$ 是諧函數的角（angular）部分（Arfken and Weber, 2001）。圖 3.3 是球面諧函數在總波數（n）小於等於 3 時，節線（nodal line）分佈的示意圖。

在極座標中定義出的任一函數 $f(\lambda,\phi)$，例如我們感興趣的純量場，如流函數、速度位（velocity potential）等，可以使用正交（orthogonal）的球面諧函數作展開：

$$f(\lambda,\phi)=\sum_{n,m} a_{nm} Y_n^m(\lambda,\phi),\, n\geq 0,\ |m|\leq n \qquad (3.16)$$

此展開式稱為球面諧函數分解（spherical harmonic decomposition），或多極分解（multipole decomposition），或拉卜拉士級數（Laplace's series）。其中，

$$a_{nm}=\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} f(\lambda,\phi) Y_n^m(\lambda,\phi) d\Omega \qquad (3.17)$$

a_{nm} 稱為多極係數（multipole coefficients），其中 $d\Omega=\sin\phi\, d\phi\, d\lambda$。球面諧函數的正交關係式為：

$$\int_{4\pi} Y_{n1}^{m1}(\lambda,\phi)\cdot Y_{n2}^{m2}(\lambda,\phi) d\Omega=\delta_{n1n2}\delta_{m1m2} \qquad (3.18)$$

遞推公式（recurrence formula）為：

$$(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}Y_n^m=-n\varepsilon_{n+1}^m Y_{n+1}^m+(n+1)\varepsilon_n^m Y_{n-1}^m \qquad (3.19)$$

其中，

$$\varepsilon_n^m=\left\{\frac{(n^2-m^2)}{(4n^2-1)}\right\}^{1/2} \qquad (3.20)$$

最初的幾個球面諧函數為：

$$Y_0^0(\lambda,\phi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,\text{(monopole)} \qquad (3.21)$$

$$Y_1^1(\lambda,\phi)=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\phi\cdot e^{i\lambda} \qquad (3.22)$$

$$Y_1^0(\lambda,\phi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\phi \qquad (3.23)$$

$$Y_1^{-1}(\lambda,\phi)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\phi\cdot e^{-i\lambda} \tag{3.24}$$

$$Y_2^m:(m=-2,-1,0,1,2)\ (\text{quadrapoles}) \tag{3.25}$$

（3.22）式～（3.24）式為雙級（dipoles）。以上幾個球面諧函數的式子顯示，球面諧函數有實部及虛部，我們將純量場投影至球面諧函數空間後取實部作分析。

球面諧函數是二維拉卜拉士運算子（Laplace operator）的特徵函數（eigenfunctions），如下所示：

$$\nabla^2 Y_n^m=-\frac{n(n+1)}{a^2}Y_n^m \tag{3.26}$$

因此，計算拉卜拉士運算子的效率將遠高於使用有限差分法（finite difference method）。在球面上，拉卜拉士運算子的定義如下：

$$\nabla^2(\ )=\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right]+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \tag{3.27}$$

將（3.15）式以及（3.27）式，代入（3.26）式，可得到：

$$\begin{aligned}(1-\mu^2)\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}P_n^m(\mu)-2\mu\frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial\mu}\\ +\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]P_n^m(\mu)=0\end{aligned} \tag{3.28}$$

這個方程式就是著名的連帶勒壤得方程式（associated Legendre equation），是將勒壤得方程式微分m次。之所以這麼稱呼，是因為它的解就是連帶勒壤得多項式，$P_n^m(\mu)$，定義為：

$$P_n^m(\mu)=(1-\mu^2)^{m/2}\frac{d^m}{d\mu^m}P_n(\mu) \qquad （3.29）$$

當 $m=0$ 時，連帶勒壤得多項式就是原始的勒壤得多項式。在 $m>0$ 的情況下，最初的幾個連帶勒壤得多項式為：

$$P_1^1(\mu)=(1-\mu^2)^{1/2} \qquad （3.30）$$

$$P_2^1(\mu)=3\mu(1-\mu^2)^{1/2} \qquad （3.31）$$

$$P_2^2(\mu)=3(1-\mu^2) \qquad （3.32）$$

圖 3.4 是緯向波數皆為 1，總波數為 1 到 5，相當於經向波數為 0 到 4 之連帶勒壤得多項式。在一般波譜模式的文獻中，連帶勒壤得多項式常藉由下式：

$$\int_{-1}^{1}\left[P_n^m(\mu)\right]^2 d\mu=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \qquad （3.33）$$

當作除數標準化（normalized）為1，（3.33）式是由連帶勒壤得多項式的正交性（orthogonality）所得到的。

連帶勒壤得多項式 P_n^m 的遞推公式如下：

$$\varepsilon_{n+1}^m P_{n+1}^m=\mu P_n^m-\varepsilon_n^m P_{n-1}^m \qquad （3.34）$$

其中 ε_n^m 定義如（3.20）式（Washington and Parkinson, 1986）。在我們的模式中，使用(3.34)式及（3.20）式，計算小於等於截斷波數的連帶勒壤得多項式。

3.3 模式設計

本研究之數值模擬部分，使用球面諧函數作為基本函數，並考慮模擬之正確性及計算效率，採用 T64，即三角形截斷（triangular truncation）於第 64 個波。

東西方向以 32 個正弦波（sine wave）和 32 個餘弦波（cosine wave）當作基本函數，微分運算使用快速傅立葉轉換（fast Fourier transform, FFT）（Cooley and Tukey, 1965）。對網格點數 $N = 2^p$ ， $p \geq 1$ 而言，直接計算離散傅立葉轉換（discrete Fourier transform），需要 N^2 之計算量；使用快速傅立葉轉換僅需要 $(N/2)\log_2 N$ 之計算量。以 $N = 1024 = 2^{10}$ 為例，快速傅立葉轉換的計算速率是直接計算的 204.8 倍，這是為何「快速」傅立葉轉換，被譽為是波譜數值計算方法之革命性突破的原因（Arfken and Weber, 2001）。快速轉換要求網格點數 $N = 2^p \times 3^q \times 5^r$ ，其中 p, q, r 為整數，且 $p \geq 1, q \geq 0, r \geq 0$ 。

南北方向以 64 個勒壤得多項式當作基本函數，微分運算使用勒壤得轉換（Legendre transform），由於不具快速轉換，因此對網格點數沒有限制。

南北方向的積分方法使用高斯求積法（Gaussian Quadrature），

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \qquad (3.35)$$

其中 $w(x)$ 是權重函數， x_k 是高斯網格點（Gaussian grid points）， A_k 為係數。由於連帶勒壤得多項式的定義域在 $[-1,1]$ ，積分間距 $[a,b]$ 可透過線性轉換（linear transformation），轉換成 $[-1,1]$ 。連帶勒壤得多項式在此區間中相互正交，滿足使用高斯求積法之條件。將原本等間距之網格點轉換至高斯網格點後，使用高斯求積法，在南北方向上使用 n 個網格

點，即可求得 2n-1 個多項式精確之積分值，最後再將值轉換回等間距網格點上的值。值得注意的是，使用高斯求積法的條件為 $f(x)$ 在 x_k 上的值存在，若 $f(x)$ 在積分間距中有特異點（singularity）存在，則計算精確度將降低。（Arfken and Weber, 2001）

綜合上述，T64 全球共有 192×96 個規則分佈的網格點，如圖 3.5 所示，網格點間距（grid spacing）為 1.875°，在赤道上約為 208 公里。

Laprise（1992）提出四種全球波譜模式解析度（resolution）的計算方法。Ferreira and Schubert（1997）採用其中第三種方法來定義他們全球波譜模式的有效水平解析度（effective horizontal resolution）；在我們的模式中，也使用相同的方法。地球的總表面積為 $4\pi a^2$，以 T64 來說，共有 64^2 個波譜係數，即有 64^2 種波譜係數的組合，因此，對於每種波譜係數的組合，平均可解析的表面積為 $4\pi a^2/(64)^2 \approx 124{,}488\ \mathrm{km}^2$，假設其所解析出的範圍為一正方形，則其邊長約為 353 公里，可視為此模式有效的水平解析度，值得注意的是，這個值大於在赤道上的網格點間距（grid spacing）。

時間積分格式使用跳蛙法（leapfrog method）。考慮決定數值模擬穩定性的 CFL (Courant- Friedrichs- Levy)條件，取時間積分間距為 300 秒。為避免使用跳蛙法而造成時間積分上「奇偶時步分裂」的現象，我們採用羅貝時間濾波器（Robert time filter），所使用的係數值為 0.05。

3.4 模式表現測試

我們以 HR98 中衰減亂流的實驗，作為測試我們模式表現的工具。實驗參數與 HR98 完全相同，將正壓渦度方程式（2.1）式等號右側黏滯項改為高階擴散項（higher-order diffusion）：$D_\zeta = \gamma \nabla^{16}\zeta$，給定

$\gamma = 2.4848 \times 10^{75}\ \mathrm{m}^{16}\mathrm{s}^{-1}$，對於總波數為 64，也就是最高波數的波來說，其解析出之渦度場的 e-folding time 為 0.5 天。在模式中總波數 35 到 45 之間的所有緯向波譜係數給定亂數，產生亂流初始場，取不同的亂數值做十組實驗。參考 HR98 的實驗設計，模式積分至 80 天。

圖 3.6 為其中一組實驗之物理空間渦度場，使用圓柱等間距投影法（cylindrical equal distance projection）[1]，圖（a）為初始亂流渦度場分佈，圖（b）為積分 80 天後的結果，因為有高階擴散項，所以渦度值隨時間減小，圖中顯示最終渦度聚集在緯向帶狀的結構中，而這些東西方向帶狀的結構，其在南北方向上的尺度即為萊茵斯尺度。

圖 3.7 是使用二維能量波譜法分析衰減亂流的實驗，取積分 80 天後十組實驗的系集平均。圖（a）為初始場的二維能量波譜，顯示能量聚集在 $n = 35 - 45$ 之間。圖（b）為積分 80 天後的結果，清楚顯示能量聚集在一個類似漏斗形狀的區域中，顯示動能反串跌到緯向結構中。

由圖 3.6 及圖 3.7，我們得到與 HR98 物理上相同的結果，顯示我們的模式有能力模擬這種能量聚集在緯向帶狀結構的現象。如此我們可進一步在第四章及第五章中，探討渦旋及地形對於噴流結構的影響。

[1] 此投影法二條經線間的緯向距離，在各緯度圈均相等，因此，高緯度的系統尺度將被放大。以下於第四、五章中，物理空間之渦度場、緯向風場、經向風場，和地形分佈皆採用此圓柱等間距投影法呈現。

第四章　植入渦旋之實驗

氣候統計資料顯示，自 1983 年以來，每年全球平均約有 85 個颱風（Webster et al., 2005）；假設每個颱風的生命期大約是 8 天，則平均每天全球約有 1.86 個颱風。以下，我們將探討渦旋這種高渦度聚集的系統對於緯向噴流結構的影響。

實驗所使用的模式是球面諧函數全球正壓波譜模式，採用 T64，所使用的正壓渦度方程式同 HR98 為：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -J(\psi, \zeta + f) - \kappa\zeta - D_{\zeta} \qquad (4.1)$$

等號右手邊第一項為渦度平流項。第二項為艾克曼線性曳力項，加入這個項的原因是為了避免動能往大尺度反串跌的過程中，在萊茵斯尺度的地方累積，造成模式計算上的不穩定。給定 $\kappa = 1.157 \times 10^{-8}$ s^{-1}，其對於渦度場的 e-folding time 為 1000 天。第三項為高階擴散項（higher-order diffusion）：$D_{\zeta} = \gamma \nabla^{16} \zeta$，對於高波數的波所解析出的物理量，其衰減的速率遠高於對於低波數的波所解析出的物理量，因此衰減率對於波數是高選擇性的。加入這個項的目的是為了避免渦度擬能在往小尺度串跌的過程中，在最小尺度的地方累積，而造成模式計算上的不穩定。給定 $\gamma = 2.4848 \times 10^{75}$ m^{16}s^{-1}，對於總波數等於 64，也就是最高波數的波來說，其解析出之渦度場的 e-folding time 是 0.5 天。

進行一組模擬，包含實驗 A 和對照實驗 B，以探討未植入渦旋與植入渦旋，對於噴流造成之影響的差異。在實驗 A 中，植入一亂流場；實驗 B 中，植入相同的亂流場之外，在南北緯 20 度的地方植入

二個強度類似輕度颱風的渦旋。我們在$n=35-45$的所有緯向波譜係數給定亂數，亂數值的範圍是$-2.5\times10^{-6}\sim2.5\times10^{-6}$，轉換到物理空間，得到初始亂流場，其均方根速率為$7.00\,\mathrm{ms^{-1}}$。實驗 B 植入二個 DeMaria and Chan（1984）所使用的渦旋（以下簡稱 DC 渦旋）。其徑向風場分佈如下式：

$$V(r)=V_m\left(\frac{r}{r_m}\right)\exp\left\{\frac{1}{b}\left[1-\left(\frac{r}{r_m}\right)^b\right]\right\} \tag{4.2}$$

徑向渦度場分佈如下式：

$$\zeta(r)=\frac{2V_m}{r_m}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_m}\right)^b\right]\exp\left\{\frac{1}{b}\left[1-\left(\frac{r}{r_m}\right)^b\right]\right\} \tag{4.3}$$

其中r為徑向半徑，V_m為最大切向風速率，r_m為最大切向風半徑，b為形狀參數。圖 4.1 為 DeMaria and Chan（1984）考慮當$V_m=30\,\mathrm{ms^{-1}}$，$r_m=100\,\mathrm{km}$，b分別等於1.0、0.5的情況下，切向風場與渦度場之徑向分佈。圖 4.1（b）顯示，中心渦旋外圍存在負渦度區，負渦度區的徑向寬度約400公里，這與目前一些颱風的觀測資料吻合。我們的全球模式網格點間距在赤道地方約為208公里，植入二個 DC 渦旋於模式中，在渦旋單一徑向方向上至少有一個網格點的渦度值為負值。在我們的模式中，植入渦旋的風場後，再由非線性平衡方程式計算出所對應的渦度場。植入最大風速為$30\,\mathrm{ms^{-1}}$，最大風速半徑$100\,\mathrm{km}$，渦旋半徑為$800\,\mathrm{km}$，$b=1.0$的二個 DC 渦旋；全球之均方根速率因這二個渦旋將增加$0.01\,\mathrm{ms^{-1}}$。

時間積分的部分，模式積分至 3000 天，一個原因是考慮長期來說，全球一直存在二個颱風；另一個原因是根據 HR98 的實驗結果，積分至 3000 天可達到穩定的模擬結果（steady state）。

圖 4.2 為實驗 A 之物理空間渦度場隨時間的變化，陰影區域為正渦度區域，顏色愈深表示渦度愈強。積分至 1000 天時，出現大尺度的緯向渦度帶，但由於有衰減項，渦度帶的強度隨時間遞減。圖 4.3 為實驗 B 之物理空間渦度場隨時間的變化。初始在 20˚N，90˚E 以及 20˚S，90˚W 的位置植入渦旋，積分 1000 天後，在南北緯 20 度的地方出現緯向帶狀的渦度分佈，積分至 3000 天時，此二條渦度帶更加明顯，其經向的寬度即為萊茵斯尺度。

Kuo et al.（1994）研究在雙曲切向風切（hyperbolic tangential shear）的環境中，由於其渦度呈現 3 個區域的分佈（以下簡稱 3 區域），其緯向平均的緯向風與渦度場之分佈如圖 4.4（a）所示。若有小擾動，將產生正壓不穩定，而不穩定最有可能發生在無因次化波長 $ky_0 = 0.3984$ 的地方，其中 y_0 為緯向帶狀寬度，顯示渦度帶的緯向波長約為經向寬度的 7 到 8 倍。若在比克萊東風噴流（Bickley easterly jet）的環境中，由於其渦度呈現 4 個區域的分佈（以下簡稱 4 區域），其緯向平均的緯向風與渦度場之分佈如圖 4.4（b）所示。不穩定最有可能發生在 $ky_0 = 1.2261$ 的地方，顯示渦度帶的緯向波長約為經向寬度的 4 倍。圖 4.5 顯示 3 區域與 4 區域無因次化波長（ky_0），與無因次化成長率（σ）之間的關係。對 3 區域的背景場來說，不穩定發生於當 $0 \le ky_0 \le 0.6392$；對 4 區域的背景場來說，不穩定發生於當 $0 \le ky_0 \le 1.8291$。在我們的實驗中，由於背景的亂流場有正有負，較接近 4 區域的背景場，由圖 4.3 最後渦度場的分佈，北半球的渦度約呈緯向波數 8 的分佈，波長約為 $4700\ \mathrm{km}$，約為經向寬度 $\sim 1200\ \mathrm{km}$ 的 4 倍，與 Kuo et al.（1994）的結果相吻合。

圖 4.6 為實驗 A 之物理空間緯向風場隨時間的變化，陰影區域代表西風，顏色愈深表示西風愈強。在積分至 1000 天時出現大尺度的西風帶。初始場的均方根速率為 $7.00\ \mathrm{ms^{-1}}$，積分至 3000 天時的均方根速率為 $0.27\ \mathrm{ms^{-1}}$。圖 4.7 為實驗 B 之物理空間緯向風場隨時間的變化，積分

至 3000 天時，在 36˚N 與 32˚S 處出現明顯西風帶，寬度分別約為 1200 及 1400 公里；且二西風帶南北等風速線的分佈是同相位，此為正壓外模（external mode）的特徵，由於只受平均流帶動，移速較斜壓模來得快。初始場的均方根速率為 7.01 ms^{-1}，積分至 3000 天時的均方根速率為 6.26 ms^{-1}。

比較這二個實驗，初始場的均方根速率僅差 0.01 ms^{-1}，最終的均方根速率卻相差將近 6 ms^{-1}，推測原因是因為渦旋具有較強的非線性平流效應，有利於組織其附近的亂流形成結構較紮實的渦旋，進而具有更強的組織能力，因此藉由非線性效應可以抵抗艾克曼線性曳力項以及高階擴散項的衰減效應。

圖 4.8（a）為實驗 A 之緯向平均緯向風隨時間的變化。陰影區域代表西風，顏色愈深代表西風愈強，白色區域代表東風。由於有衰減項，東風、西風均隨時間減弱。圖 4.8（b）為實驗 A 之緯向平均緯向風取 3000 天的時間平均，顯示形成了許多風帶，但強度不強。圖 4.9（a）為實驗 B 之緯向平均緯向風隨時間的變化。顯示在植入渦旋的附近出現明顯的西風帶，且有向高緯度移動的趨勢；這是因為渦旋具有正渦度，受到 β 效應的影響，以北半球為例，正渦度將往西北方向移動，因此西風帶會有向北移動的分量。圖 4.9（b）為實驗 B 之緯向平均緯向風取 3000 天的時間平均，顯示在植入渦旋的附近出現明顯的西風分量，最大值分別位於 32˚N 以及 26˚S 處，西風分量經向寬度約為 1200 公里。這樣的結果與 FS99 的實驗結果，渦旋會造成其附近西風加速相吻合。

圖 4.10 為實驗 A、B 之動能（KE）與渦度擬能（EN）隨時間的變化。與 Kuo et al.（2004）圖 8 做比較，顯示動能多了大約 40％的衰減，這是因為背景存在行星渦度梯度，系統會產生 β 羅士比波將能量帶走，能量愈分散則衰減愈快；比較 KE 與 EN 顯示二維亂流選擇性衰減的性

質。而實驗 B 由於有植入渦旋，增強其非線性平流效應，可抵抗模式中的消耗項以及能量頻散的衰減效應，因此動能與渦度擬能隨時間的遞減值較實驗 A 小。

圖 4.11 為 Palinstrophy 隨時間的變化，虛線為實驗 A，實線為實驗 B。初始 Palinstrophy 隨時間增加，是攪動（stirring）的過程；過了最大值後隨時間快速遞減，是混合（mixing）的過程。實驗 B 由於有植入渦旋，非線性平流效應較顯著，渦度較強，渦度梯度較大，因此 Palinstrophy 的值略大於實驗 A。圖 4.10 與圖 4.11 的結果，與 Kuo et al.（2004）圖 8 中，$\nu = 97.5$（點線）的實驗結果定性上相吻合。

圖 4.12 為實驗 A 的（a）初始時間，（b）積分 3000 天之二維能量波譜分析結果。橫軸為緯向波數（m），縱軸為總波數（n），圖中最大值標準化為 1。圖（a）為初始亂流場之分析，因此在 $n = 35 - 45$ 的區間，有能量聚集。圖（b）中由於能量皆聚集在左下方波數較小的區域，為了能清楚表示，僅繪出總波數小於 25 的區域，顯示能量最終聚集在低緯向波數的緯向調和波中，也就是能量聚集在大尺度的緯向流中。圖 4.13 為實驗 B 的（a）初始時間，（b）積分 3000 天之二維能量波譜分析結果。圖（a）是在 $n = 35 - 45$ 給能量，再植入二個渦旋之初始場的分析結果。圖（b）顯示能量最終聚集在數個最低緯向波數的緯向調和波中。圖 4.12（a）與圖 4.13（a）相似；但比較（b）圖，實驗 B 積分 3000 天後，能量聚集在數個最低緯向波數的緯向調和波中，在大尺度聚集的程度較高。推測原因為渦旋可以將其附近的亂流組織成尺度較大及完整，涵蓋整個緯度圈的帶狀噴流，這種系統的緯向波數為 0，因此能量聚集在數個最低緯向波數的緯向調和波中。

圖 4.14 為實驗 A 的（a）初始時間，（b）積分 3000 天之一維雙對數座標能量波譜之分析結果。橫軸為總波數（n），縱軸為動能波譜

【$E(n)$】。圖（a）顯示在$n = 35 - 45$之間有高峰值。圖（b）中虛線為$n^{-5/3}$，點虛線為n^{-3}。顯示在$10 \le n$的範圍斜率為-3，物理上代表渦度擬能串跌至小尺度；$3 \le n \le 10$的範圍斜率近似於$-5/3$，物理上代表動能反串跌至大尺度；在$n \le 3$的區域，能量往低波數遞減，原因是β羅士比波能量頻散將能量由系統中帶走。在實驗 A 中，萊茵斯尺度的波數約為 3。圖 4.15 為實驗 B 的（a）初始時間，（b）積分 3000 天之一維雙對數座標能量波譜分析結果。圖（a）顯示由於加入渦旋而產生振盪，與圖 4.14（a）有明顯差異；圖（b）虛線為$n^{-5/3}$，點虛線為n^{-3}。顯示在$20 \le n \le 40$的範圍斜率為-3，$n \le 20$的範圍斜率近似於$-5/3$，這是由於渦旋具有非線性效應，使系統可以抵抗β羅士比波所造成的頻散效應，因此動能可反串跌至更大的尺度。在$40 \le n$的區域，顯示能量更陡峭地往小尺度的地方減小，這是由於高階擴散項的衰減效應。

圖 4.16（a）為實驗 A 之緯向平均位渦（$\overline{P}$）隨緯度的分佈，虛線為初始場，實線為積分 3000 天後的結果。最終顯示緯向平均位渦曲線隨緯度分佈平滑，由行星渦度（f）所主宰。（b）為積分 3000 天後，緯向平均經向擾動位渦通量（$\overline{P^*v^*}$）隨緯度的分佈。圖 4.17（a）為實驗 B 之緯向平均位渦（$\overline{P}$）隨緯度的分佈，虛線為初始場，實線為積分 3000 天後的結果。在南北緯 25°附近位渦隨緯度幾乎沒有變化，梯度緩和，此區域為磯波區（surf zone），其附近位渦梯度很大。圖 4.7 的西風帶分別位於 36°N 以及 32°S，比較位置後發現，北半球（南半球）磯波區位於西風帶的南側（北側），這樣的結果與理論相吻合。（b）為積分 3000 天後緯向平均經向擾動位渦通量（$\overline{P^*v^*}$）隨緯度的分佈，在南北緯 20 度植入渦旋的附近，出現明顯向北位渦通量；北半球正值的部分經向寬度約為 1200 公里，對照圖 4.7，約等於西風帶的尺度。

圖 4.18 為積分 3000 天與初始場$\bar{u}$之差值，虛線為實驗 A，實線為實驗 B。比較圖 4.17（b）與圖 4.18 中的實線，緯向平均經向擾動位渦

通量（$\overline{P^*v^*}$）之極大值與$\Delta\bar{u}$之極大值位置相同，顯示向北的擾動位渦通量有助於西風加速，此結果與 FS99 之理論與實驗結果相吻合。

由以上討論我們發現，植入二個強度為輕度颱風的渦旋，經由非線性效應會造成很不一樣的結果。由於實驗 A、B 的初始場均方根速率相差$0.01\,\mathrm{ms^{-1}}$，我們之後將實驗 B 的亂流初始場稍微調弱，使實驗 B 的初始場均方根速率與實驗 A 同為$7.00\,\mathrm{ms^{-1}}$，實驗結果與實驗 B 幾乎相同，顯示渦旋對於渦度帶的確具有良好的組織能力。

我們同時做了 DC 渦旋強度及大小的敏感度測試，考慮大而強（$V_m = 70\,\mathrm{ms^{-1}}$，$r_m = 150\,\mathrm{km}$）、大而弱（$V_m = 15\,\mathrm{ms^{-1}}$，$r_m = 150\,\mathrm{km}$）、小而強（$V_m = 70\,\mathrm{ms^{-1}}$，$r_m = 80\,\mathrm{km}$），及小而弱（$V_m = 15\,\mathrm{ms^{-1}}$，$r_m = 80\,\mathrm{km}$）的 DC 渦旋，渦旋大小與植入位置皆與實驗 B 相同。實驗結果顯示，這四個實驗最終皆出現明顯的帶狀渦度帶，渦旋強度較強的實驗最終帶狀渦度帶的強度亦愈強；而渦旋尺度較大的實驗，最終形成的帶狀渦度帶經向方向寬度亦較大。這樣的實驗結果顯示，是否出現明顯緯向帶狀渦度帶，對於渦旋的大小及強度之敏感程度不高。

我們亦探討植入渦旋的緯度對於緯向噴流的影響，植入與實驗 B 尺度及強度相同的 DC 渦旋，實驗結果顯示，最終出現明顯緯向帶狀渦度帶的位置皆在所植入渦旋的附近。而較高緯度受限於地球之幾何形狀，緯度圈較小，因此最終所形成之正壓不穩定波數較少，在將渦旋植入在 45˚N 的實驗中，正壓不穩定的波數約為 4，同樣亦滿足渦度帶的緯向波長約為經向寬度的 4 倍的理論。

實驗 A、B 中所植入的 DC 渦旋，其中心外圍有負渦度帶。因此，我們將探討不同的渦旋結構，對於噴流所造成的影響。在 20˚N，90˚E 以及 20˚S，90˚W 的位置植入高斯渦旋（Gaussian vortex），其渦度值

皆為正值，空間分佈如下式：

$$\zeta(x,y)=\zeta_{\max}\cdot\exp\left[(\frac{x-x_0}{a_0})^2+(\frac{y-y_0}{b_0})^2\right] \quad (4.4)$$

其中 $\zeta_{\max}$ 為渦旋中心最大的渦度值，(x_0,y_0) 為渦旋中心點的位置，a_0、b_0 分別為渦旋之長軸與短軸半徑。實驗中給定 $\zeta_{\max}=3\times10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$，強度約為中度颱風，$a_0=b_0=800\ \mathrm{km}$。在我們的模式中，植入渦度場後，再由非線性平衡方程式（3.14）式計算出所對應的風場。

圖 4.19 為植入高斯渦旋的實驗，物理空間渦度場隨時間的變化。在植入渦旋的附近並未出現明顯的渦度帶，這樣的結果與植入 DC 渦旋的實驗結果有很大的差別。而將植入的高斯渦旋增強至超級強烈颱風的強度，也並未出現如圖 4.3 明顯的帶狀渦度分佈。

為了進一步測試 DC 渦旋外圍微弱的負渦度區，是否為造成結果差異的原因，我們植入渦度值同樣皆為正值的阮肯渦旋（Rankine vortex），其標準化後的徑向風場分佈如下式：

$$V(r_j)=\begin{cases} r_j & r_j\le 1 \\ r_j^{-1} & r_j>1 \end{cases} \quad (4.5)$$

其中 r_j 為無因次化的徑向距離。徑向渦度場分佈如下式：

$$\zeta(r_j)=\begin{cases} 1-\exp\left[-\frac{5}{r_j}\exp\left(\frac{1}{r_j-1}\right)\right] & r_j\le 1 \\ 0 & r_j>1 \end{cases} \quad (4.6)$$

在我們的模式中，植入的圓形渦旋半徑為 800 公里，給定最大渦度值為 $3\times10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$，植入渦旋渦度場後，再由非線性平衡方程式計算出所對應

的風場。

圖 4.20 為植入阮肯渦旋的實驗，物理空間渦度場隨時間的變化。在植入渦旋的附近並未出現明顯的渦度帶。而將植入的阮肯渦旋增強至超級強烈颱風的強度，也未出現如圖 4.3 明顯的帶狀渦度分佈。

比較圖 4.3、圖 4.19 和圖 4.20，我們感興趣的問題是：為何加入 DC 渦旋最後會出現帶狀結構，而植入高斯及阮肯渦旋則沒有帶狀結構出現，反而受曳力衰減較快？推測原因為 DC 渦旋外圍有負渦度區，較不易與亂流中的正渦度合併，受地球旋轉，渦旋被拉伸成帶狀後，因區域較小因此衰減較慢。而高斯與阮肯渦旋由於與周圍亂流合併成較大的尺度，衰減較快，因此最終強度較弱。另一方面，由黏滯項的式子來看，$D_\zeta \propto \nabla^{16} \propto [n(n+1)]^8$，對於總波數較大的系統衰減效應較強。由先前得到的推論，植入 DC 渦旋最終形成帶狀的結構，經向波數數量級為 1，緯向波數近似於 0，總波數很小，因此衰減不顯著。反觀植入高斯及阮肯渦旋的實驗，系統合併成較大的尺度，由於經向波數與緯向波數皆存在，因此其總波數會比植入 DC 渦旋實驗的總波數值來得大，因此衰減較快。

第五章　植入地形之實驗

地球上存在著許多山脈地形，地形的存在會造成周圍流體厚度變淺，由位渦守恆方程（2.33）式，會造成背景的渦度梯度，因此同樣存在萊茵斯尺度。我們於是想要探討地形對於噴流的影響。

實驗所使用的模式是球面諧函數全球淺水波譜模式，T64，控制方程組為（4.1）式、（3.12）式和（3.13）式。在（4.1）式中給定 $\kappa = 2.315 \times 10^{-8}\ \mathrm{s}^{-1}$，其對於渦度場的 e-folding time 為 500 天，這是因為地形可視為一永久的強迫作用，因此所給的衰減值較植入渦旋的實驗為大。並給定 $\gamma = 2.4848 \times 10^{75}\ \mathrm{m}^{16}\mathrm{s}^{-1}$，對於總波數等於 64，也就是最高波數的波來說，其解析出之渦度場的 e-folding time 為 0.5 天。亂流初始場是在 $n = 35 - 45$ 之間的所有緯向波譜係數給定亂數，模式積分 90 天，時間積分格式使用跳蛙法，時步為 300 秒。

所植入的地形標準化後的空間分佈如下式：

$$h_T(r_j) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\dfrac{5}{r_j} \exp\left(\dfrac{1}{r_j - 1} \right) \right] & r_j \le 1 \\ 0 & r_j > 1 \end{cases} \qquad (5.1)$$

其中 r_j 為無因次化的徑向距離，給定地形之最大高度為 1500 公尺。淺水模式平均深度取 2000 公尺，略大於地形高度，如此較能顯現植入地形的效應，此深度之重力波波速為 $140\ \mathrm{ms}^{-1}$。圖 5.1 為一組理想地形測試實驗所植入的地形，地形之中心點位於赤道，180°E。實驗 A 未植入地形；實驗 B 植入半徑為 4000 公里的圓形地形，其尺度與波數 5 的波長相近；實驗 C 植入的地形橫軸為 2500 公里，縱軸為 8000

公里，其型式類似安地斯山脈；實驗 D 為將實驗 C 的地形緯向放置，其型式類似歐洲的阿爾卑斯山脈及青康藏高原；實驗 E 為實驗 C 的地形以中心點為圓心，右轉 45°；實驗 F 為左轉 45°，其型式類似北美洲的落磯山脈。圖 5.2 為植入緯向地形（實驗 D）之（a）東西方向剖面圖，（b）南北方向剖面圖。

圖 5.3 為實驗積分 90 天後之物理空間渦度場，在沒有植入地形（實驗 A）中，形成零星的帶狀結構；在植入經向地形（實驗 C）中，所形成之帶狀結構數量較少；在植入緯向地形（實驗 D）中，所產生出的緯向渦度結構較紮實，強度亦較強。由位渦守恆，最終系統之帶狀結構將平行於地形，因此，緯向地形有助於系統形成緯向帶狀結構；經向地形會破壞由行星渦度梯度所形成之緯向帶狀結構。

圖 5.4 為實驗積分 90 天後的一維雙對數座標能量波譜分析結果。橫軸為總波數（n），縱軸為動能波譜【$E(n)$】。圖中短虛線為$n^{-5/3}$，長虛線為n^{-3}。顯示斜率$-5/3$與-3之交界不在初始給亂流的波數，和圖 2.8 有所不同。推測有 2 個原因：（1）地形是一種強迫機制，因此交界處會和地形尺度有關。（2）因為模式是初始值問題（initial value problem），亂流隨時間合併成較大的尺度，代表能量隨時間往低波數移動，相當於在低波數的地方給能量，因此交界處在低波數處而不在給能量源的波數。

圖 5.4 顯示實驗 B、C 及 D 出現了$-5/3$的斜率；實驗 A、E 及 F 則無。經過測試，實驗 A、E 及 F 需積分至 180 天才會出現完整$-5/3$及-3的斜率，這樣的結果顯示規則地形（軸與經緯線平行的地形），有助於動能在較短時間內反串跌到大尺度。我們以實驗 C 作為測試模擬所需最低解析度之實驗。解析度由 T64 依序往下遞減作測試，在模擬積分至平衡狀態（steady state）的條件下，發現要模擬出完整一維能量波譜$-5/3$

以及-3的斜率，解析度至少需為 T60 以上。

圖 5.5 為實驗積分 90 天後，緯向平均緯向風取 90 天時間平均的結果。顯示在植入地形的附近有明顯的西風分量，其尺度與地形的尺度相近。

相同地形在不同緯度會出現不同的效應。β效應在赤道附近最顯著，以$\cos\phi$之分佈朝極區遞減，同時，赤道附近旋轉的切向速度最大，因此，在赤道附近，以地球旋轉產生的緯向帶狀結構為主要的現象，植入地形之效應為次要的因素；在中高緯度地方，β效應相較來說較不顯著，地形將可扮演較重要的角色。舉例來說，經向配置的地形，根據位渦守恆，將出現平行於地形之風場結構，在北半球其西側將出現南風，東側將出現北風；若將一經向地形置於赤道附近，由於此區域為地球旋轉造成之β效應最為顯著的區域，因此可能最終平行於地形之經向風場較不明顯；而若將此地形置於較高的緯度，由於β較小，地形之效應將較為顯著，同時，高緯度的f較大，地形產生之氣旋或反氣旋式環流較能維持；我們的模擬結果支持這樣的推論。

接著我們考慮全球地形的分佈，比較理想地形與真實地形對於噴流造成影響之差異，平均深度取 6000 公尺；青康藏高原之地勢與尺度均為全球之最，推測具有最重要的效應。實驗 G 依照全球主要地形位置分佈，植入理想地形，圖 5.6（a）為地形高度分佈圖，最大地形高度分別為青康藏高原 5000 公尺、北美洲落磯山脈 3000 公尺、南美洲安地斯山脈 4000 公尺。實驗 H 植入真實全球地形，圖 5.6（b）為地形高度分佈圖，最大地形高度為 5526 公尺。

圖 5.7 及圖 5.8 分別為，依照全球主要地形分佈植入理想地形（實驗 G），以及植入全球真實地形（實驗 H）之物理空間渦度場隨時間的變化，陰影區域為正渦度區域，顏色愈深表示渦度愈強。由於有衰減項，

渦度帶的強度隨時間遞減。植入真實地形實驗中，亂流渦度場除隨時間合併成較大尺度外，同時產生較多中小尺度的渦度擾動，推測原因是由於真實地形結構較為複雜，所激發出的重力波（gravity wave）會破壞系統的結構，阻止系統藉由非線性動力合併成較大尺度的過程，因此存在著中小尺度的渦度擾動。另外，圖 5.7 及圖 5.8 在北半球大約 80˚N 的地區皆有明顯的正渦度，推測原因為地形造成的正渦度經由 β 效應向高緯度移動，而兩個正渦度的位置大約相差半個地球的距離，推測是由於移速不同所造成。

圖 5.9 為植入全球真實地形（實驗 H）之（a）模式積分 30 天，物理空間經向風場之分佈，顯示在 90˚W 附近，北美洲地形的西側出現南風，風速達 $5\,\mathrm{ms}^{-1}$，東側出現北風，風速將近 $-5\,\mathrm{ms}^{-1}$，環繞地形出現反氣旋之風場，與由位渦守恆推導出之風場相吻合。（b）為模式積分 90 天，物理空間緯向風場之分佈，顯示在 90˚E 附近，青康藏高原的北側出現西風，風速達 $20\,\mathrm{ms}^{-1}$，南側出現東風，風速將近 $-10\,\mathrm{ms}^{-1}$，環繞地形同樣出現反氣旋之風場，與由位渦守恆推導出之風場相吻合。而平行於地形帶狀結構的出現時間，北美洲地形較青康藏高原出現的早，推測原因為北美洲地形尺度較小，所產生出的效應其尺度亦較小，相較來說是較為短暫的（transient）；而青康藏高原由於尺度較大，地勢亦高，因此需要較長的時間，才能產生與地形達成平衡之系統，出現平行於地形分佈的帶狀結構風場。

我們同樣分析實驗 G 及實驗 H 之一維動能波譜分佈。實驗 G 在積分至 90 天時出現完整的動能波譜分佈，顯示動能及渦度擬能已經過完整的串跌過程至大尺度與小尺度；實驗 H，經過積分時間的測試，需積分至 270 天才可模擬出完整的動能波譜分佈。推測原因為真實地形結構較為複雜，所激發出的重力波（gravity wave）將阻止系統之動能透過非線性效應反串跌至大尺度，因此，模式達成穩定狀態的時間將延後。

第六章　討論與總結

二維亂流由於非線性平流效應，隨時間將合併成較大的尺度。在球面上由於具有南北旋轉的差異，當系統尺度逐漸成長，將感受到背景的行星渦度梯度，而激發出β羅士比波的能量頻散將能量由系統中帶走，因此系統在經向方向上所能成長之最大尺度，稱做萊茵斯尺度（Rhines scale）；在緯向方向上由於沒有旋轉的差異，故沒有萊茵斯尺度的限制，系統可無限制成長，最終形成帶狀的結構。HR98 的實驗結果顯示，在物理空間及波譜空間，均顯示能量呈緯向帶狀的分佈，且能量愈多，最終出現的帶狀強度愈強、數目愈少。此外，地形的存在造成其周圍流體厚度變淺，使背景存在渦度梯度，因此同樣亦有萊茵斯尺度存在。惟在HR98 的工作中，並未探討渦旋與地形對於噴流的影響。

本文延續 HR98 的工作，探討渦旋與地形對於緯向噴流結構的影響。研究結果顯示：（1）渦旋與地形的存在，均使其周圍出現西風加速的現象；地球上常出現颱風等高能量聚集的渦旋，其存在對於地球上盛行的行星風帶可能有增強的效應；西風經過青康藏高原，會在背風側形成一永久背風氣旋（Lee cyclone），其存在對於日本中緯度地區之高層西風噴流可能有增強的效應。（2）植入渦旋與地形，所得到的時間平均緯向平均緯向風剖面，不如 HR98 的實驗，如圖 2.7 所示，來得平滑，顯示局部區域的擾動會影響大尺度噴流的結構。（3）植入 DC 渦旋的實驗中，在初始植入渦旋的附近出現明顯環繞整個緯度圈的帶狀噴流，其經向方向上的寬度為萊茵斯尺度，出現之正壓不穩定波動滿足在比克萊東風噴流環境下發生之正壓不穩定，渦度帶的緯向波長約為經向寬度的 4 倍，與 Kuo et al.（1994）之理論相吻合。（4）植入渦旋造成局部區域之西風加速，以北半球來說，將在西風帶南側出現磯波區，而在渦旋附近出現最大之向北位渦通量，與 FS99 之實驗結果

相吻合。（5）渦旋對於亂流的組織能力與渦旋結構有關，DC 渦旋能有效組織亂流形成緯向帶狀的結構，高斯渦旋及阮肯渦旋則否。（6）由位渦守恆，最終系統之帶狀結構將平行於地形，因此，緯向地形有助於系統形成緯向帶狀結構；經向地形會破壞由行星渦度梯度所形成之緯向帶狀結構。（7）規則地形（軸與經緯線平行的地形），有助於動能在較短時間內反串跌到大尺度，約可減少一半的時間。（8）要模擬出完整的能量波譜分佈解析度至少需為 T60。

另外，地球南北的溫度梯度是造成中緯度西風帶的主要原因。斜壓不穩定使緯流可用位能轉換為渦流可用位能，會扮演使西風減弱的角色。

未來工作的部分，（1）渦旋造成西風加速之觀測佐證，將考慮在出現渦旋時，分析其附近 NCEP / NCAR（National Center for Environmental Prediction / National Center for Atmospheric Research）再分析（reanalysis）中層（700 hPa）資料，分析是否出現有西風加速的現象。（2）在植入渦旋的過程中加入強迫作用（forcing），參考 Lim and Chang（1981）使用強迫函數：

$$F(t)=\frac{t^2}{2\tau^3}e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (6.1)$$

當強迫函數之時間常數$\tau=1\,\mathrm{day}$時，代表緩慢之強迫作用，系統將激發出羅士比波與克耳文波（Kelvin wave）；當$\tau=15\times10^3\,\mathrm{s}$時，代表快速之強迫作用，系統將激發出混合羅士比重力波（mixed Rossby-gravity wave）和慣性重力波（inertial-gravity wave），強迫振幅隨時間的變化如圖 6.1 所示，使用強迫函數以期能更接近自然界中渦旋形成的過程。（3）地球上的地形並非呈整數波數的分佈，因此可進一步探討，地形位置之波數配置對於緯向噴流的影響。（4）調整淺水模式南北的厚度，使重力位高度場的分佈與地球上季節變化的情況更相似，即夏半球水深較深，冬半

球水深較淺，以進一步模擬噴流。（5）參考 Pierrehumbert（1999），植入追蹤參數（tracer），探討被動純量（passive scalar）之波譜分佈，如此可探討位渦通量（PV flux）與經向水氣渦流通量（meridional eddy flux of water vapor）間的關係，即探討純粹由動力場帶動之熱力場的分佈狀況。（6）參考 HR98，以能量通量（energy flux），探討渦流與渦流交互作用（eddy-eddy interaction）以及渦流與平均流交互作用（eddy-mean flow interaction），以期能更瞭解渦旋這種局部的擾動，如何藉由非線性效應與大尺度的平均流交互作用，進而改變大尺度現象的型態。（7）目前模式中所使用的擴散項是計算淨擴散量，即單方向往小尺度擴散，然而，自然界中亦有由小尺度擴散至大尺度的現象，因此，將來考慮使用正壓模式，驗證 Nakamura（2004）之擴散雙向傳送（diffusion two-way transport）理論，即使用診斷方程式，計算朝不同方向傳送的質量和追蹤參數通量。

參考文獻

陳怡良，1995：地形對渦旋路徑影響之探討。國立台灣大學大氣科學研究所碩士論文，台北，台灣，42 頁。

葉篤正、高由禧 等，1988：青藏高原氣象學。明文書局，台北，台灣，318 頁。

Arfken, G. B., and H. J. Weber, 2001: Mathematical methods for physicists (5th Ed.). Harcourt Academic Press, 1112 pp.

Batchelor, G. K., 1969: Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **12** (*Suppl.* II), 233-239.

Boer, G. J., 1983: Homogeneous and isotropic turbulence on the sphere. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 154-163.

Bourke, W., 1972: An efficient, one-level, primitive-equation spectral model. *Mon. Wea. Rev.*, **100**, 683-689.

Cooley, J. W., and J. W. Tukey, 1965: Math. *Comput*., **19**, 297.

DeMaria, M., and J. C. L. Chan, 1984: Comments on “A numerical study of the interactions between two tropical cyclones.” *Mon. Wea. Rev*., **112**, 1643-1645.

Durran, D. R., 1998: Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics. Springer, 465 pp.

Ferreira, R. N., and W. H. Schubert, 1999: The role of tropical cyclones in the formation of tropical upper-tropospheric troughs. *J. Atmos. Sci.*,

56, 2891-2907.

Grose, W. L., and B. J. Hoskins, 1979: On the influence of orography on large-scale atmospheric flow. *J. Atmos. Sci.*, **36**, 223-234.

Held, I. M., 1983: Stationary and quasi-stationary eddies in the extratropical troposphere: Theory. In Large-Scale Dynamical Processes in the Atmosphere, ed. B. J. Hoskins and R. Pearce. Academic Press, New York, 127-168.

Holton, J. R., 2004: An introduction to dynamic meteorology (4th Ed.). Elsevier Academic Press, 533 pp.

Huang, H.-P., and W. A. Robinson, 1998: Two-dimensional turbulence and persistent zonal jets in a global barotropic model. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 611-632.

Kuo, H.-C., and C.-H. Horng, 1994: A study of finite amplitude barotropic instability. *TAO*, **5**, 199-243.

——, L.-Y. Lin, C.-P. Chang, and R. T. Williams, 2004: The formation of concentric vorticity structures in typhoons. *J. Atmos. Sci.*, **61**, 2722-2734.

——, R. T. Williams, J.-H. Chen, and Y.-L. Chen, 2001: Topographic effects on barotropic vortex motion: no mean flow. *J. Atmos. Sci.*, **58**, 1310-1327.

Laprise, R., 1992: The resolution of global spectral models. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **73**, 1453-1454.

Leith, C., 1980: Nonlinear normal mode initialization and quasi-geostrophic theory. *J. Atmos. Sci.*, **37**, 958-968.

Lilly, D. K., 1969: Numerical simulation of two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids (suppl. II)*, 240-249.

Lim, Hock, and C.-P. Chang, 1981: A theory for midlatitude forcing of tropical motions during winter monsoons. *J. Atmos. Sci.*, **38**, 2377-2392.

McIntyre, M. E., and T. N. Palmer, 1984: The “surf zone” in the stratosphere. *J. Atmos. Terr. Phys.*, **46**, 825-849.

McWilliams, J. C., 1984: The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, **146**, 21-43.

——, and G. R. Flierl, 1979: On the evolution of isolated, nonlinear vortices. *J. Phys. Oceanogr.*, **9**, 1183-1206.

Nakamura, N., 2004: Quantifying asymmetric wave breaking and two-way transport. *J. Atmos. Sci.*, **61**, 2735-2748.

Orszag, S. A., 1970: Transform method for calculation of vector-coupled sums: Application to spectral form of the vorticity equation. *J. Atmos. Sci.*, **27**, 890-895.

Pierrehumbert, R. T., 1999: The Batchelor spectrum and tracer cascade. *GFDSSP*, **6**, 1-7.

Rhines, P. B., 1975: Waves and turbulence on a beta-plane. *J. Fluid Mech.*, **69**, 417-443.

Salmon, R., G. Holloway, and M. Hendershott, 1976: The equilibrium statistical mechanics of simple quasi-geostrophic models. *J. Fluid Mech.*, **75**, 691-703.

Schubert, W. H., 2001: Atmospheric dynamics. 198 pp.

Tennekes, H., 1978: Turbulent flow in two and three dimensions. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **59**, 22-28.

Vallis, G. K., and M. E. Maltrud., 1993: Generation of mean flows and jets on a beta plane and over topography. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1346-1362.

Washington, W. M., and C. L. Parkinson, 1986: An introduction to three-dimensional climate modeling. Oxford University Press, 422 pp.

Webster, P. J., G. J. Holland, J. A. Curry, and H.-R. Chang, 2005: Changes in tropical cyclone number, duration, and intensity in a warming environment. *Science*, **309**, 1844-1846.

圖 1.1　航海家 2 號（Voyager 2）在接近木星時所拍攝的照片，照片上方是北方。圖中清楚顯示木星表面緯向的噴流結構，以及位於南半球反時鐘旋轉的大紅斑（great red spot）。

圖 1.2　哈伯太空望遠鏡（Hubble Space Telescope, HST）所拍攝的土星照片，圖中顯示許多緯向帶狀的結構。

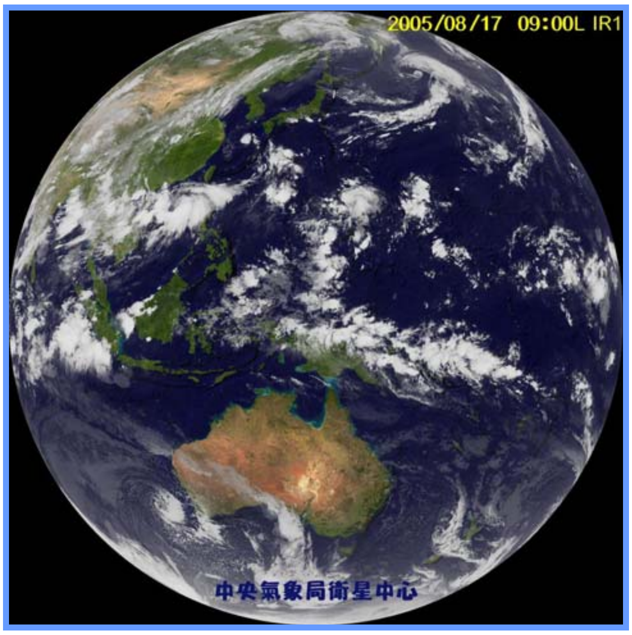


圖 1.3　2005 年 8 月 17 日 0900Z 的紅外線衛星雲圖。大部分的區域都沒有明顯的系統，僅於低緯度地區有些零星對流擾動。

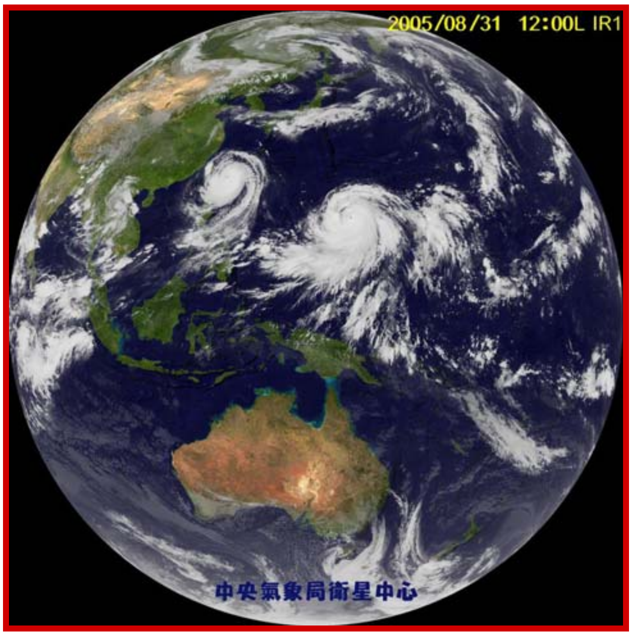


圖 1.4　2005 年 8 月 31 日 1200Z 的紅外線衛星雲圖。左側是強烈颱風泰利，右側是超級強烈颱風娜比。其周圍由於颱風外圍的下沈氣流，大氣是相當穩定無雲的。

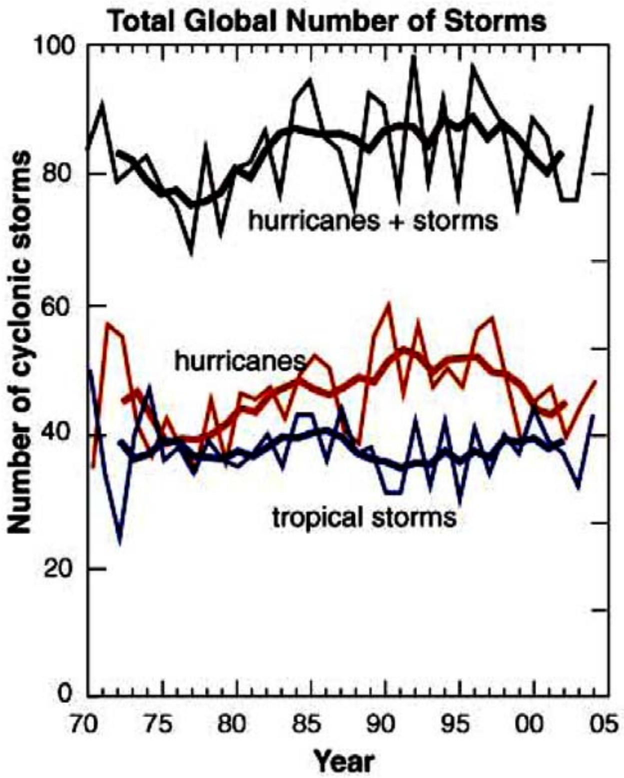


圖 1.5　1970-2004 年共 34 年間，全球風暴數目之時間序列。圖中細實線為年變化，粗實線為 5 年之移動平均（running average）。藍色線為強度達熱帶氣旋，但尚未達颱風之風暴個數；紅色線為強度達颱風之風暴個數；黑色線為紅色線和藍色線之總和，即強度達熱帶氣旋以上之風暴個數總和。（摘自 Webster et al., 2005）

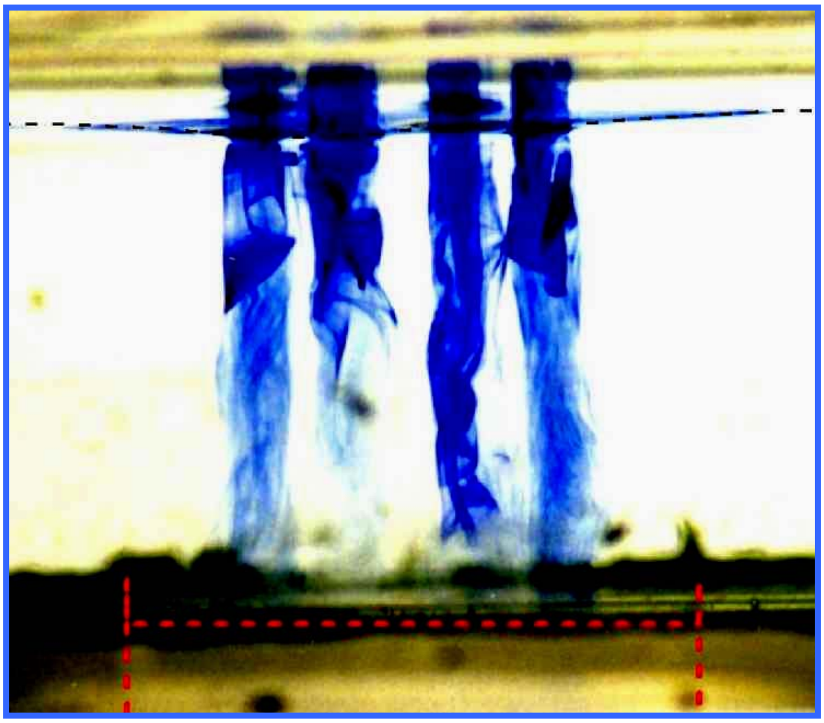


圖 2.1　Montgomery（2003）實驗所攝得的照片。水槽置於一個旋轉的轉盤上，藍色墨水最後聚集在柱狀的空間中，這種現象稱為泰勒柱（Taylor column）。

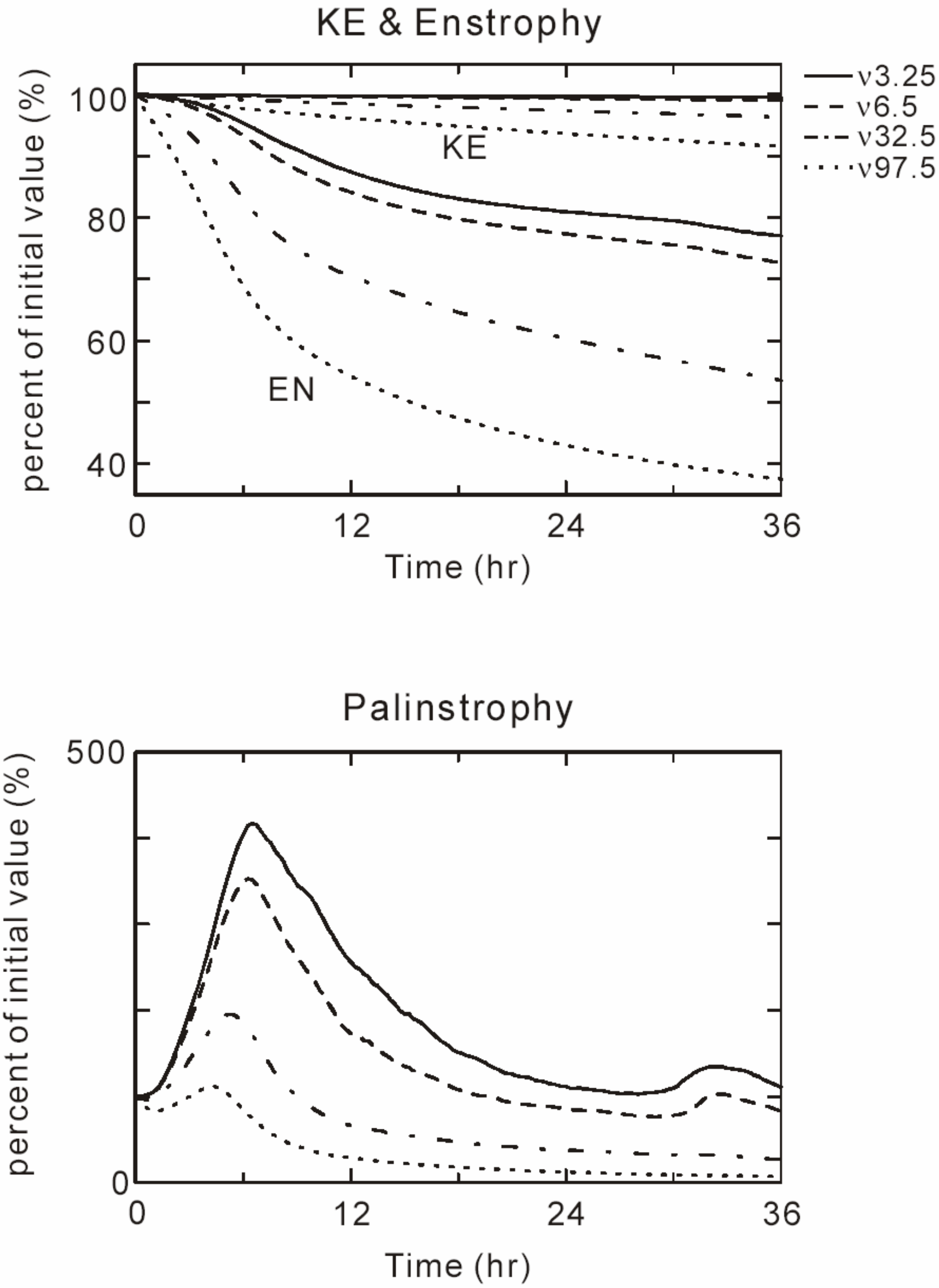


圖 2.2　使用非輻散正壓模式，模擬雙渦旋交互作用，對黏滯係數ν的敏感度測試。顯示 KE（動能）、EN（渦度擬能）和 palinstrophy 隨時間變化的情形。圖中橫軸為時間，縱軸為相對於初始值的百分比。當ν愈小，圖中實線，palinstrophy 極大值愈大（如下圖所示），則動能愈近似於保守，但渦度擬能仍串跌（如上圖所示），顯示二維亂流選擇性衰減的現象。（摘自 Kuo et al., 2004）

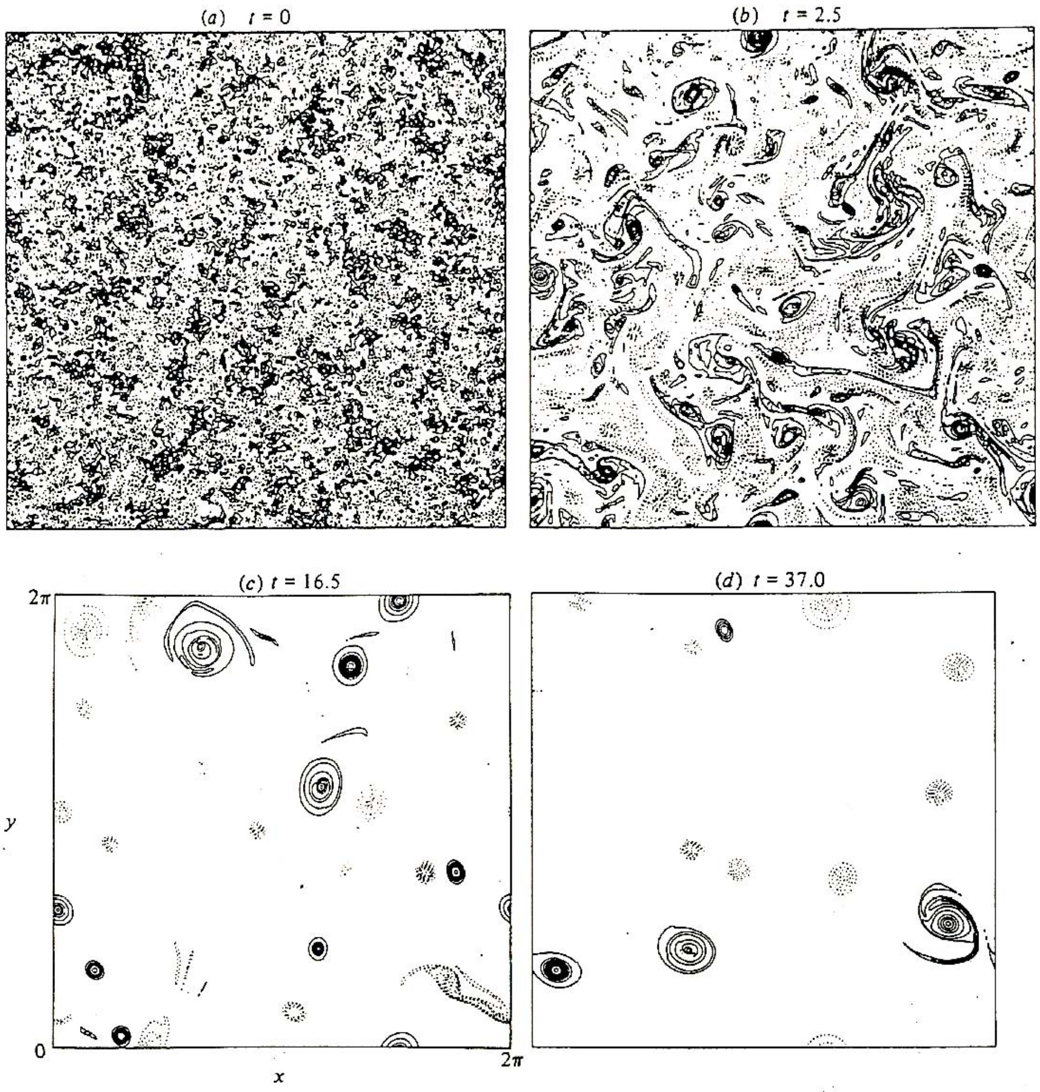


圖 2.3　二維亂流隨時間變化之渦度場。時間由左而右，由上而下。實線為正渦度區，虛線為負渦度區。二維亂流在受平流動力影響下，將變成尺度較大，強度較強，為數較少的渦旋，並形成較長生命期的渦旋結構（coherent vortices）。（摘自 McWilliams, 1984）

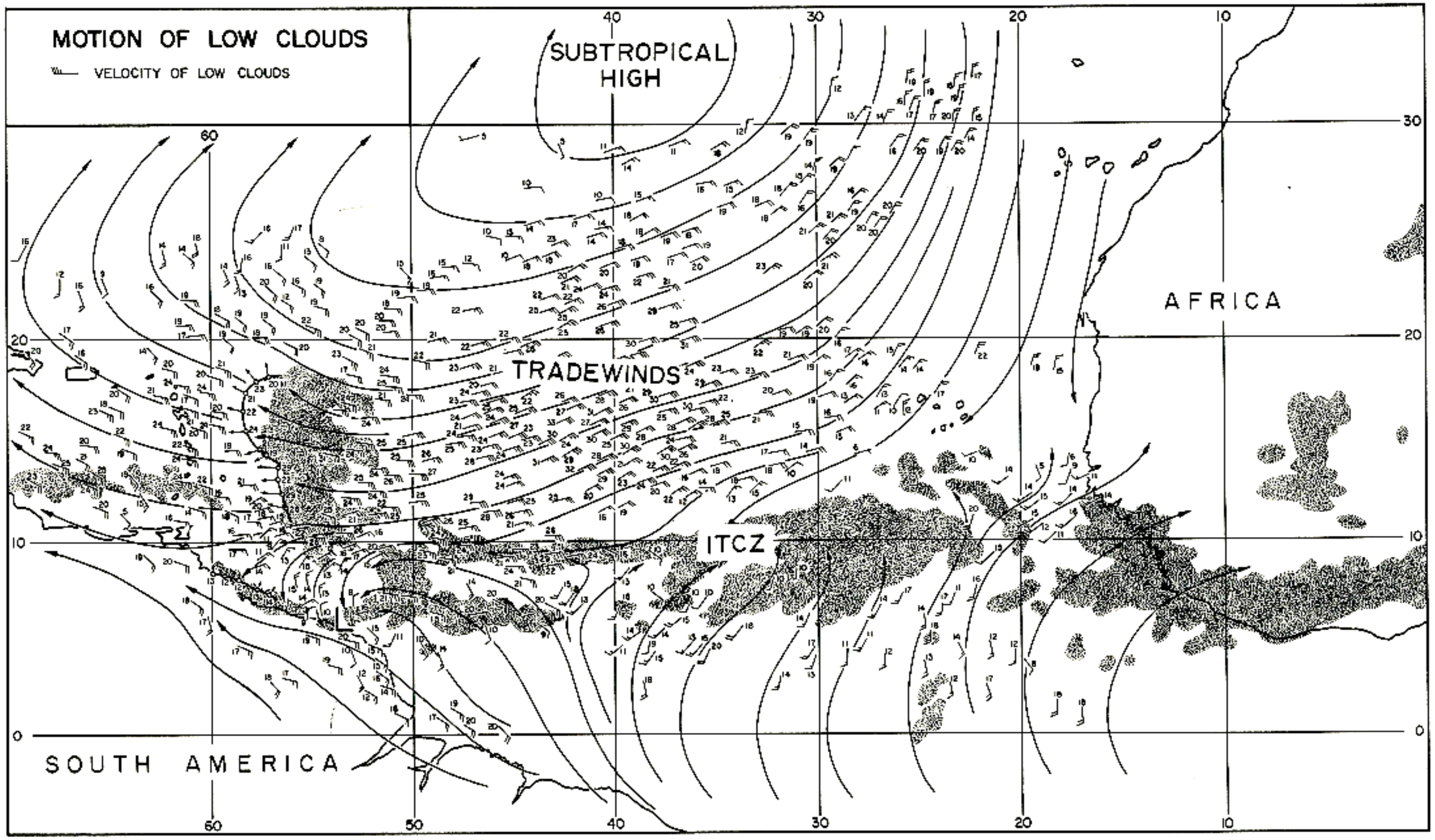


圖 2.4　大西洋熱帶地區某天之風場及流線場分佈圖。風場顯示，由北往南的氣流，其向右偏轉的程度，較由南往北的氣流向右偏轉的程度大。由此可知，地球高低緯度間存在著旋轉的差異。【摘自 *J. Met. Soc. Japan* **49**, 816（1971）】

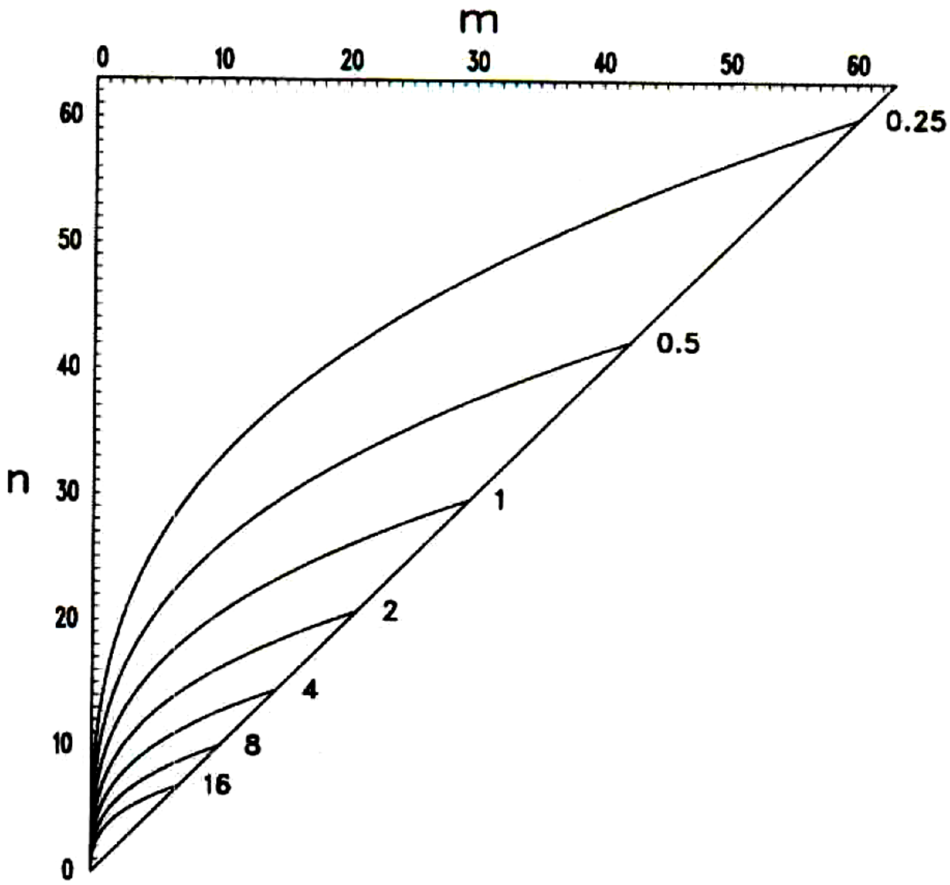


圖 2.5　由（2.29）式，圖中曲線是在二維波數平面上的萊茵斯曲線。圖中橫座標 m 為緯向波數，縱座標 n 為總波數，曲線右側的數字為均方根速率 V_{rms}（ms^{-1}）。顯示均方根速率與萊茵斯尺度成正比。而由低緯向波數主要由亂流所主宰的現象，顯示萊茵斯尺度具有不等方向性的性質。（摘自 Huang and Robinson, 1998）

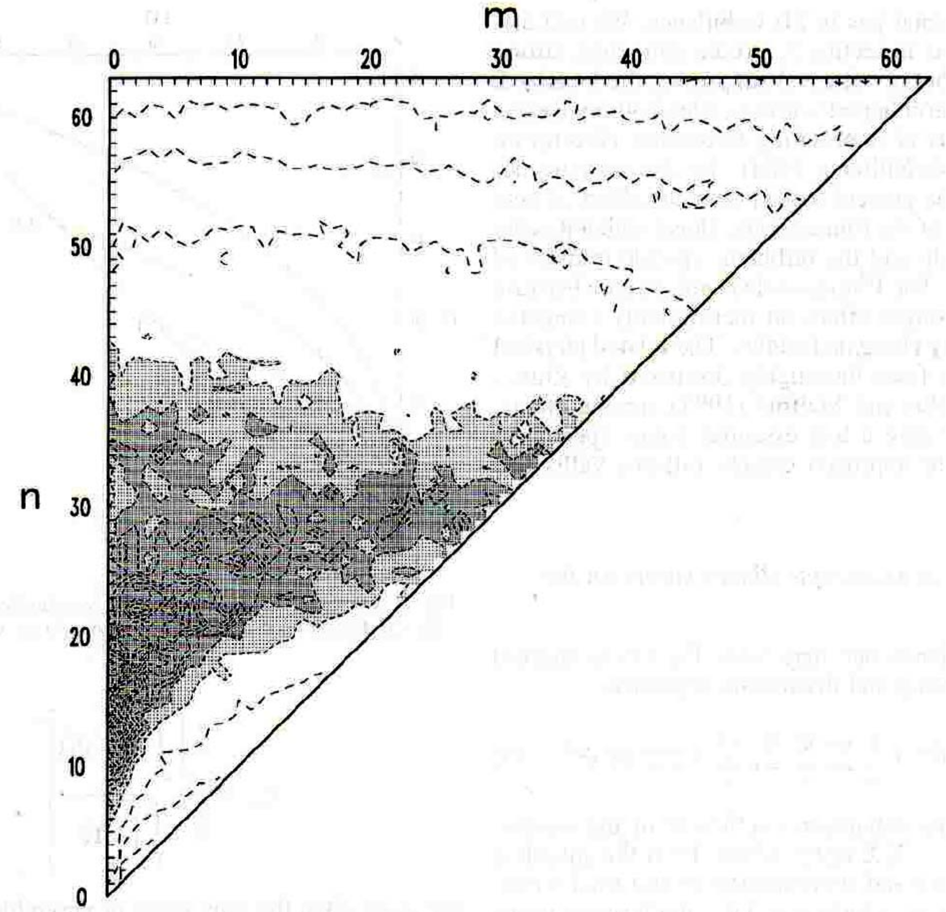


圖 2.6　在總波數 35 到 45 之間給初始亂流，使用正壓模式積分 80 天，取十組實驗的系集平均，所得到的二維能量波譜。將圖中的最大值標準化為 1，等值線為 0.0001，0.001，0.01，0.1 到 0.9 之間的間距為 0.1。值超過 0.1 的區域為淺灰色，超過 0.2 的區域為深灰色。顯示能量多聚集在緯向結構中。（摘自 Huang and Robinson, 1998）

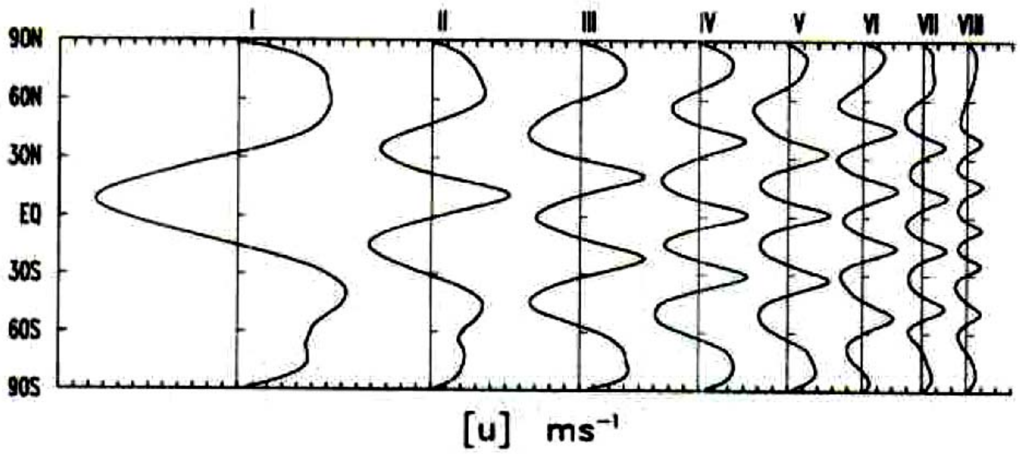


圖 2.7 初始能量不同的 8 組實驗，時間平均緯向平均緯向風的實驗結果。由左到右是初始能量由大到小，橫軸座標上，一個間隔為 1 ms^{-1}，實驗 I 所得到的結果類似地球上行星風帶的分佈。（摘自 Huang and Robinson, 1998）

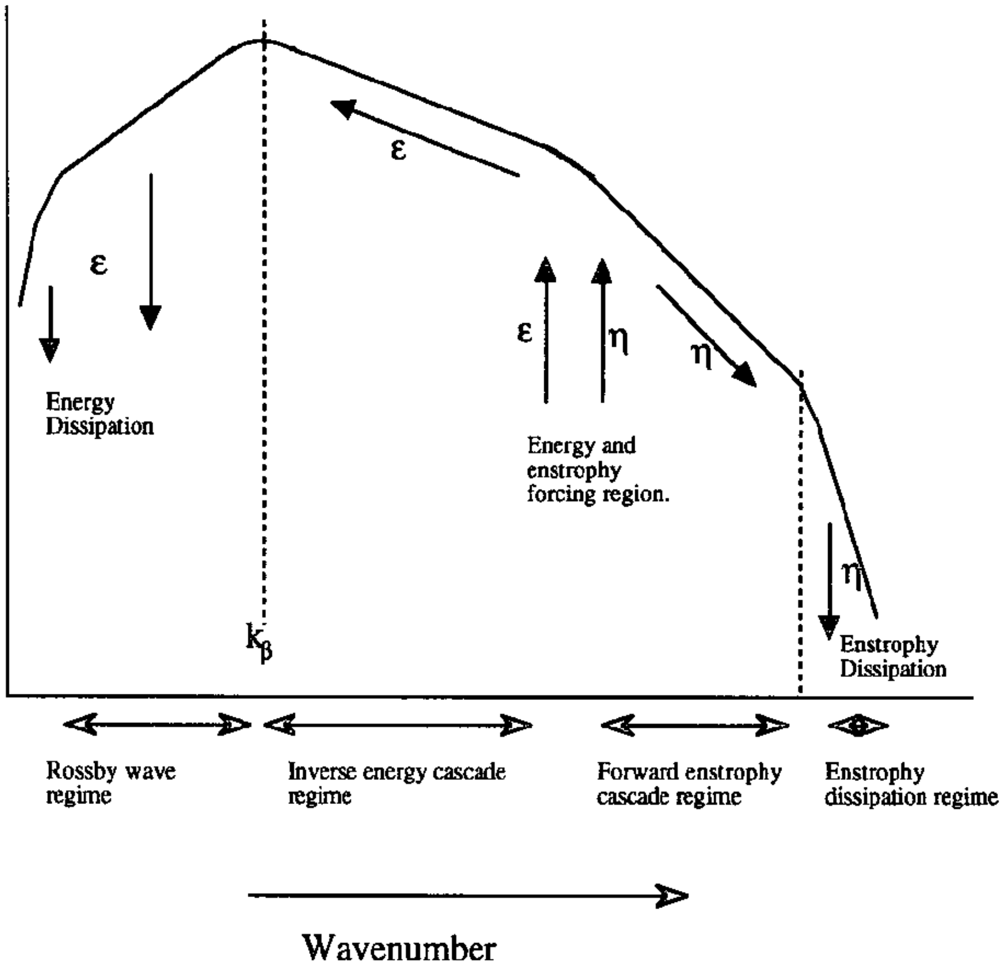


圖 2.8　能量波譜示意圖。圖中橫軸為波數，圖左側是大尺度，右側是小尺度，圖中黑色實線是能量波譜。ε與η的定義如內文所述。初始在中小尺度的區域給能量，隨時間，動能將以$n^{-5/3}$的比例向大尺度反串跌，當尺度超過萊茵斯尺度後，能量由β羅士比波帶走。另一方面，渦度擬能將以n^{-3}的比例向小尺度串跌，最後被黏滯項消耗掉。（摘自 Vallis and Maltrud, 1993）

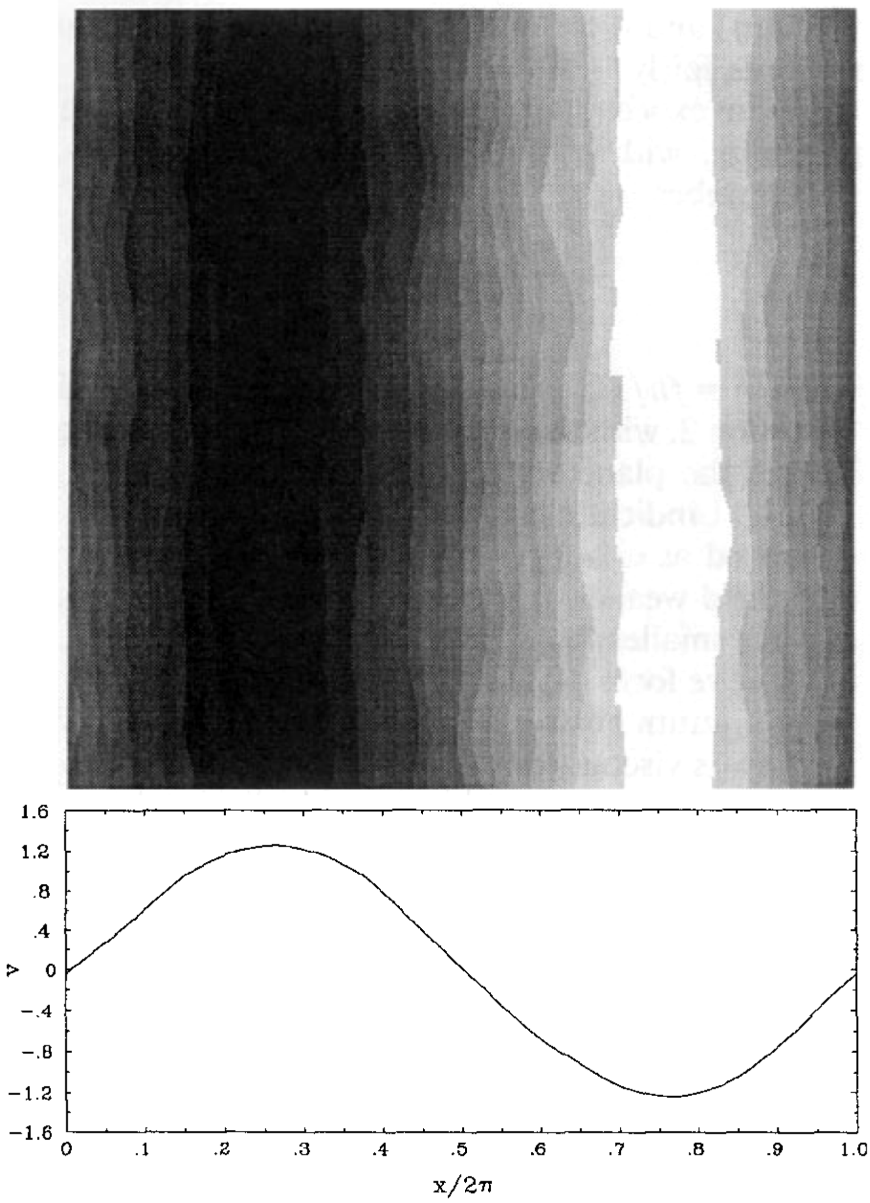


圖 2.9　在 f plane 上植入一餘弦函數形狀的地形，峰頂位於中線處，所得到最終經向風的結果。上圖為時間平均的經向風，黑色代表最大南風值，白色代表最大北風值；下圖為時間平均，經向平均經向風。顯示地形左側出現南風，右側出現北風，風帶在緯向方向上的尺度受到萊茵斯尺度所限制。（摘自 Vallis and Maltrud, 1993）

Topography: cosine shape

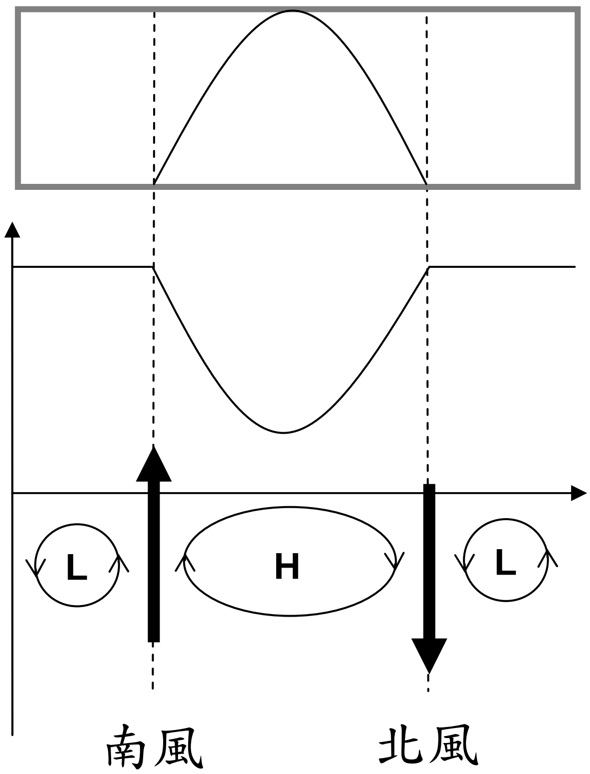


圖 2.10　地形產生風場的示意圖。考慮在 f plane 上的流體，地形附近由於水深較淺，由位渦守恆，地形附近的相對渦度值會較遠離地形處來得小。考慮北半球的情形，滿足地轉平衡的風場，在地形左側要出現南風，右側要出現北風。

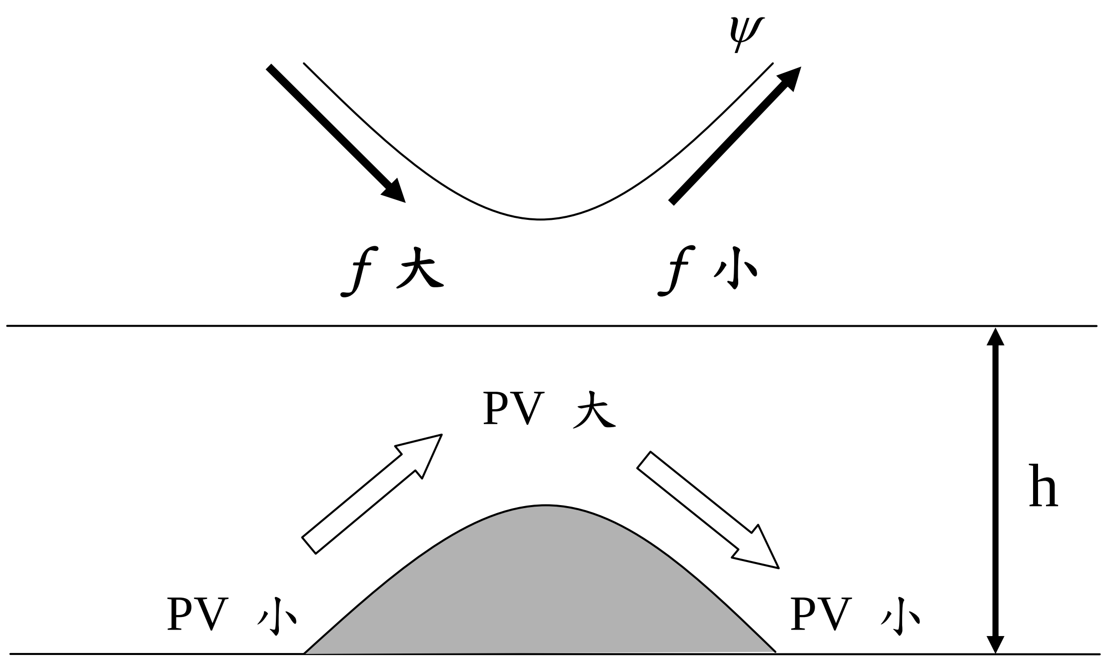


圖 2.11　地形產生長波駐波的示意圖。根據位渦方程式以及因為是駐波，山頂地方的流體永遠維持位渦大，山下的流體位渦小，山下的流體被帶上山需要供給位渦，若尺度夠大則由經向的行星渦度平流供給。因此，在地形上方所生成的波動是長波，流函數ψ與地形h_T的分佈是反相位的關係。另一種說法是h大的地方f大，h小的地方f小，因此流體在過山的過程中位渦並沒有改變。

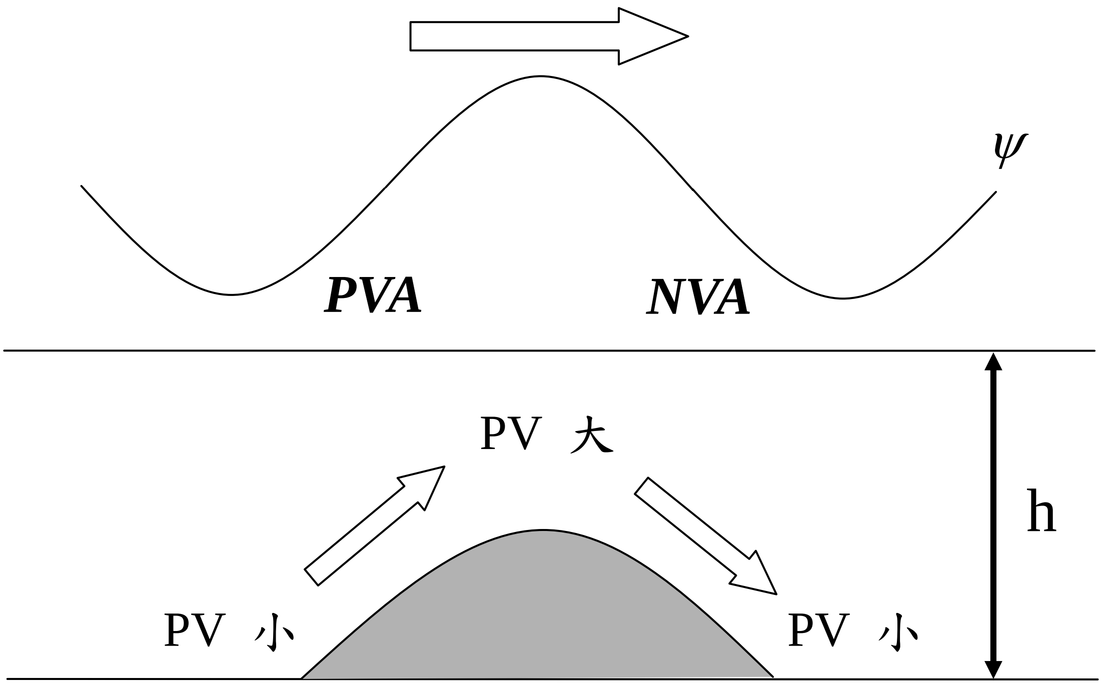


圖 2.12　地形產生短波駐波的示意圖。根據位渦方程式以及因為是駐波，山頂地方的流體永遠維持位渦大，山下的流體位渦小，山下的流體被帶上山需要供給位渦，可由緯向的相對渦度平流供給。因此，在地形上方所生成的波動是短波，流函數ψ與地形h_T的分佈是同相位的關係。

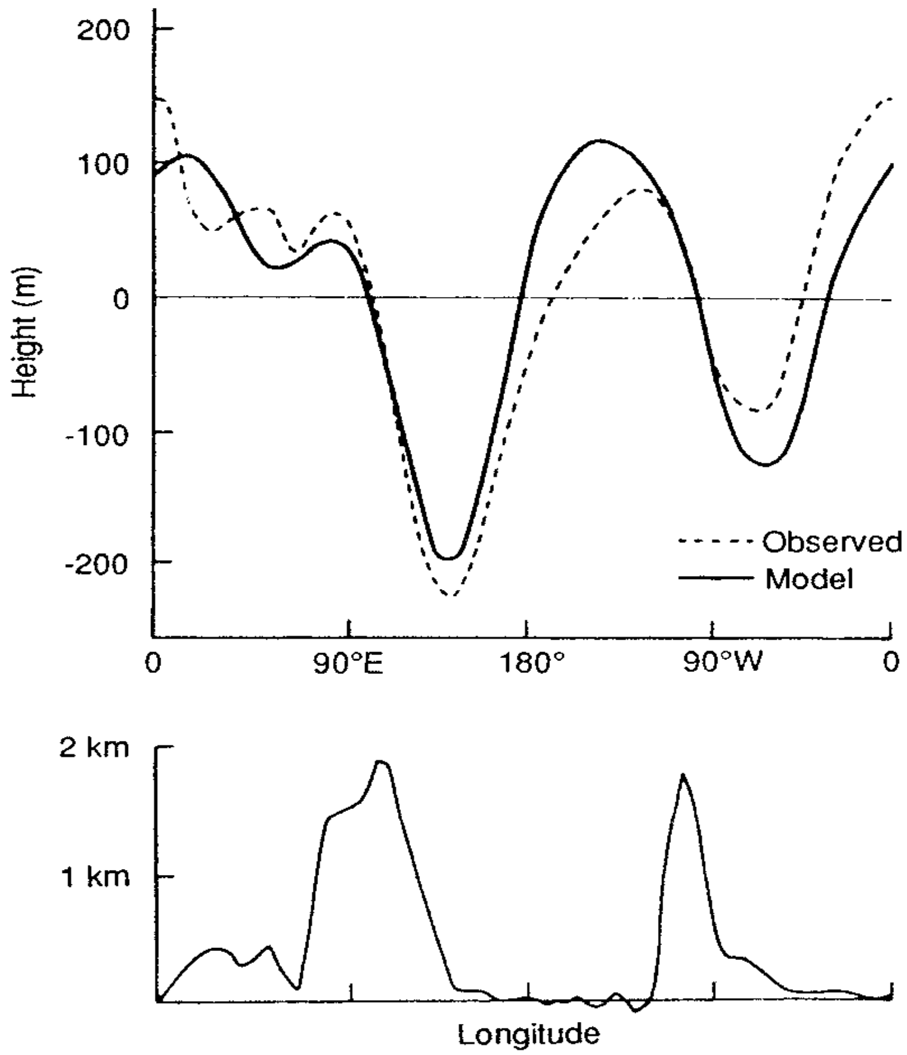
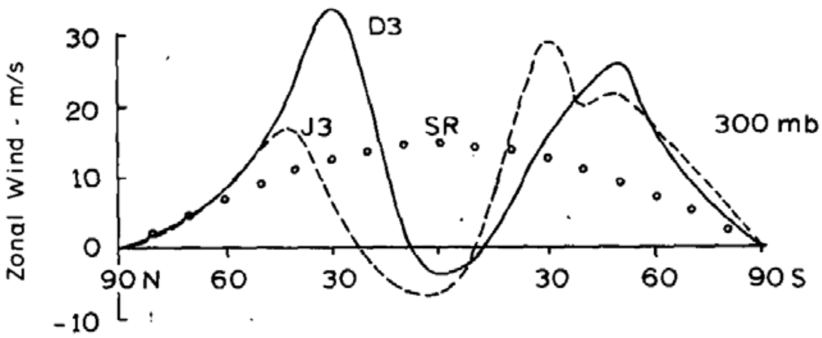


圖 2.13　下圖為用於模式計算，經過平滑處理後 45˚N 的地形剖面。上圖實線為使用 Charney-Eliassen model 模擬擾動重力位高度場（$\equiv f_0\psi/g$）的結果；虛線為一月份 45˚N，500 百帕擾動重力位高度場的觀測結果。顯示二者的型態相當地吻合。(After Held, 1983)（摘自 Holton, 2004）

(a)



(b)

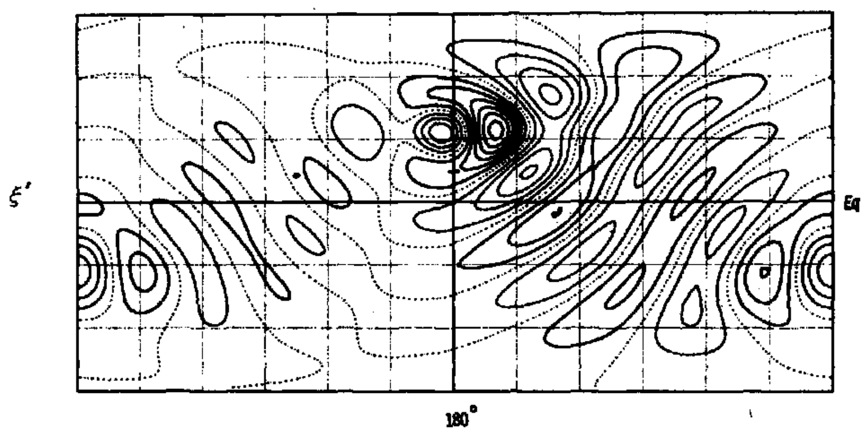


圖 2.14　（a）在淺水模式中植入理想的緯向風。其中空心圓圈曲線，代表具有等角速度的緯向風，命名為 SR（super-rotation），赤道地方風速最強，為15 ms^{-1}；D3 與 J3 分別為冬季和夏季 300 mb 觀測到的平均緯向風。（b）利用線性化淺水模式，在 30°N 的地方植入一直徑為 45°的圓形地形，以及 SR 的緯向風，最終的擾動渦度場分佈。圖中實線為正值，0 值線以點線表示，虛線代表負值。顯示地形上方出現負渦度，下游出現正渦度，以及一連串向東南方傳遞的波列。（摘自 Grose and Hoskins, 1979）

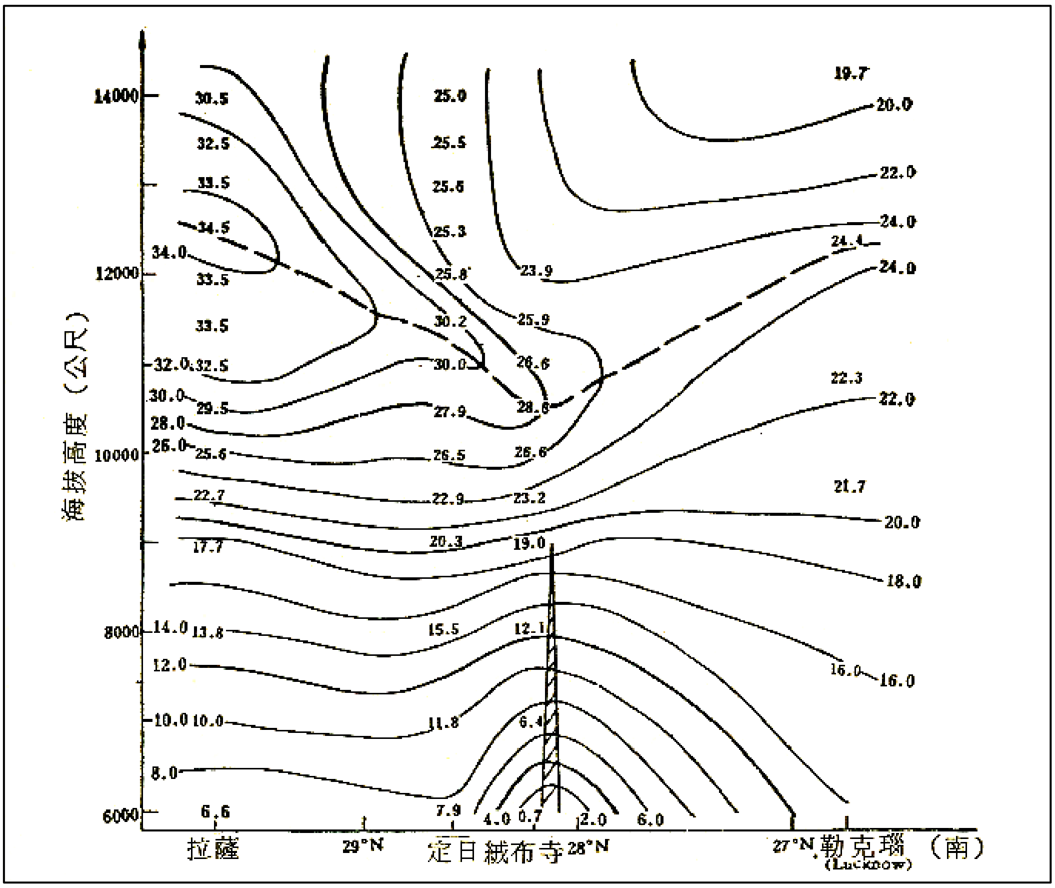
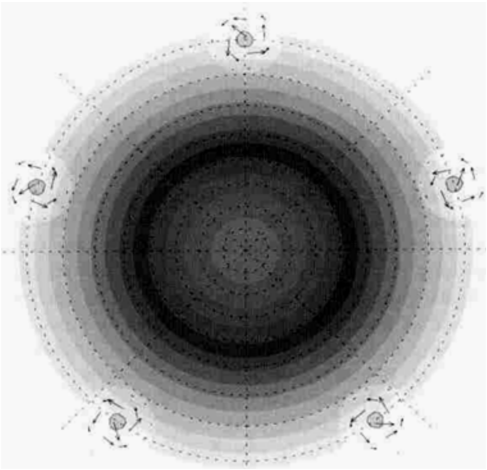
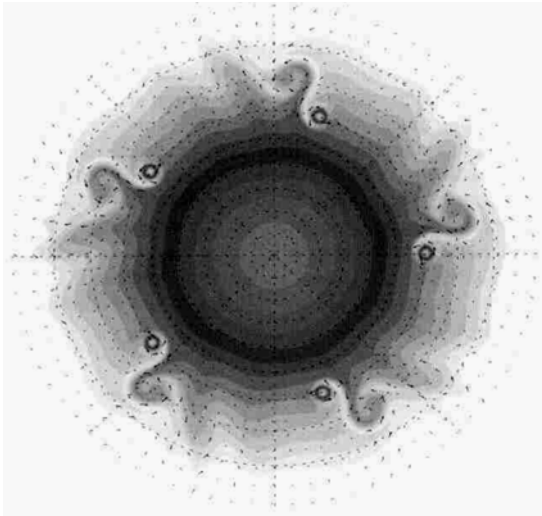


圖 2.15　1975 年 5 月平均，沿 85˚E 緯向風速隨緯度之剖面，圖中三角形陰影區為埃弗勒斯峰之位置，圖中數值單位為 ms^{-1}。顯示在埃弗勒斯峰附近，最大風速中心高度最低。（摘自 葉與高等人，1988）

(a)



(b)



(c)

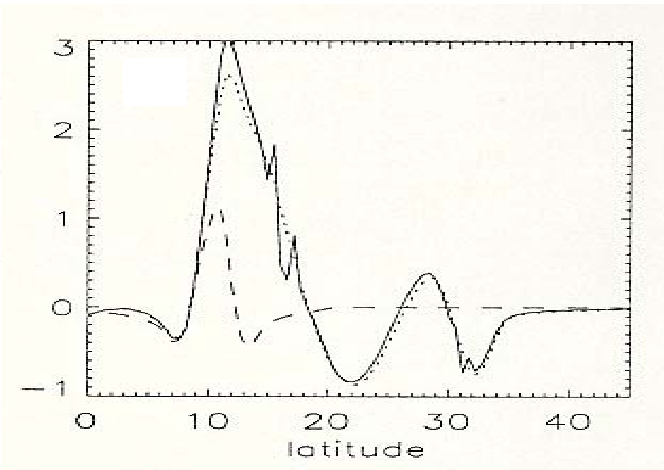
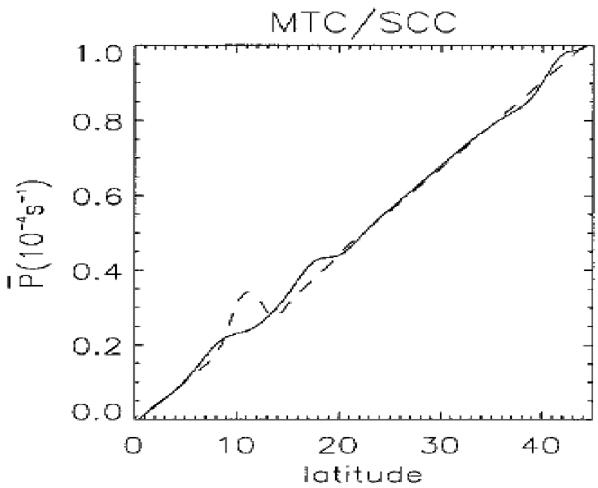


圖 2.16　（a）使用全球淺水模式，在 10°N 的地方植入 5 個半徑為 2° 的渦旋。（b）為積分 14 天後的結果，顯示渦旋往西北方向移動，因此具有向北的位渦通量。（c）為緯向平均質量權重向北位渦通量（$\overline{hP^*v^*}$）隨緯度的變化圖，顯示渦旋存在的附近有極值出現。（摘自 Ferreira and Schubert, 1999）

(a)



(b)

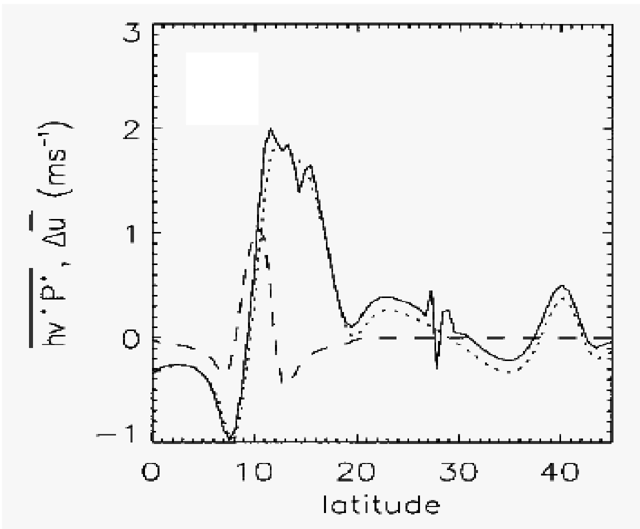


圖 2.17　在緯向對稱圓形極區渦旋的背景流場中，10°N 的地方植入 5 個半徑為 2°的渦旋之模擬結果。圖中虛線為第 1 天；實線為第 15 天。(a) 緯向平均位渦隨緯度的變化。(b) $\overline{hP^{*}v^{*}}$ 隨緯度的變化。圖中點線為第 1 天與第 15 天緯向平均緯向風之差值（$\Delta\bar{u}$）。(摘自 Ferreira and Schubert, 1999)

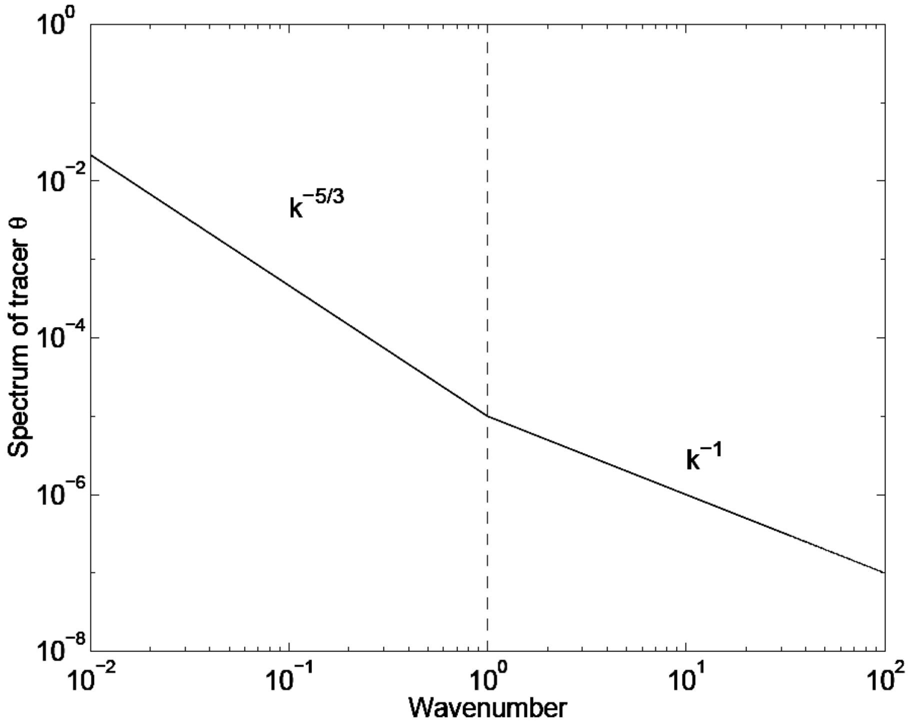


圖 2.18　由三維亂流速度場帶動的追蹤參數，最終的波譜分佈圖。顯示在平移主宰的體系中，波譜分佈的斜率為−5/3，而在消散主宰的體系中，波譜分佈的斜率為−1。（摘自 Pierrehumbert, 1999）

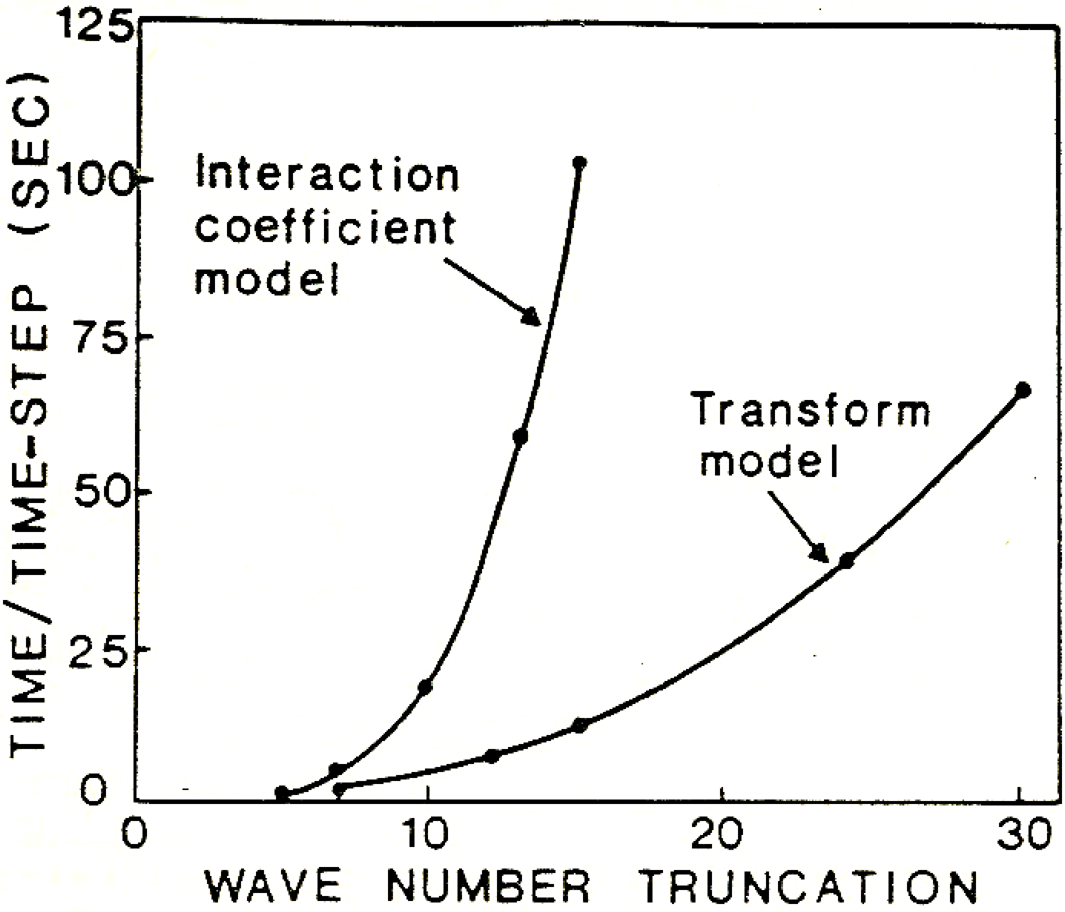


圖 3.1 交互係數模式與波譜轉換模式，在不同截斷波數的情況下，計算一個時步所需時間的比較。顯示在固定截斷波數的情況下，使用波譜轉換法的模式計算一個時步所需的時間，遠小於交互係數模式所需的時間。(摘自 Bourke, 1972)

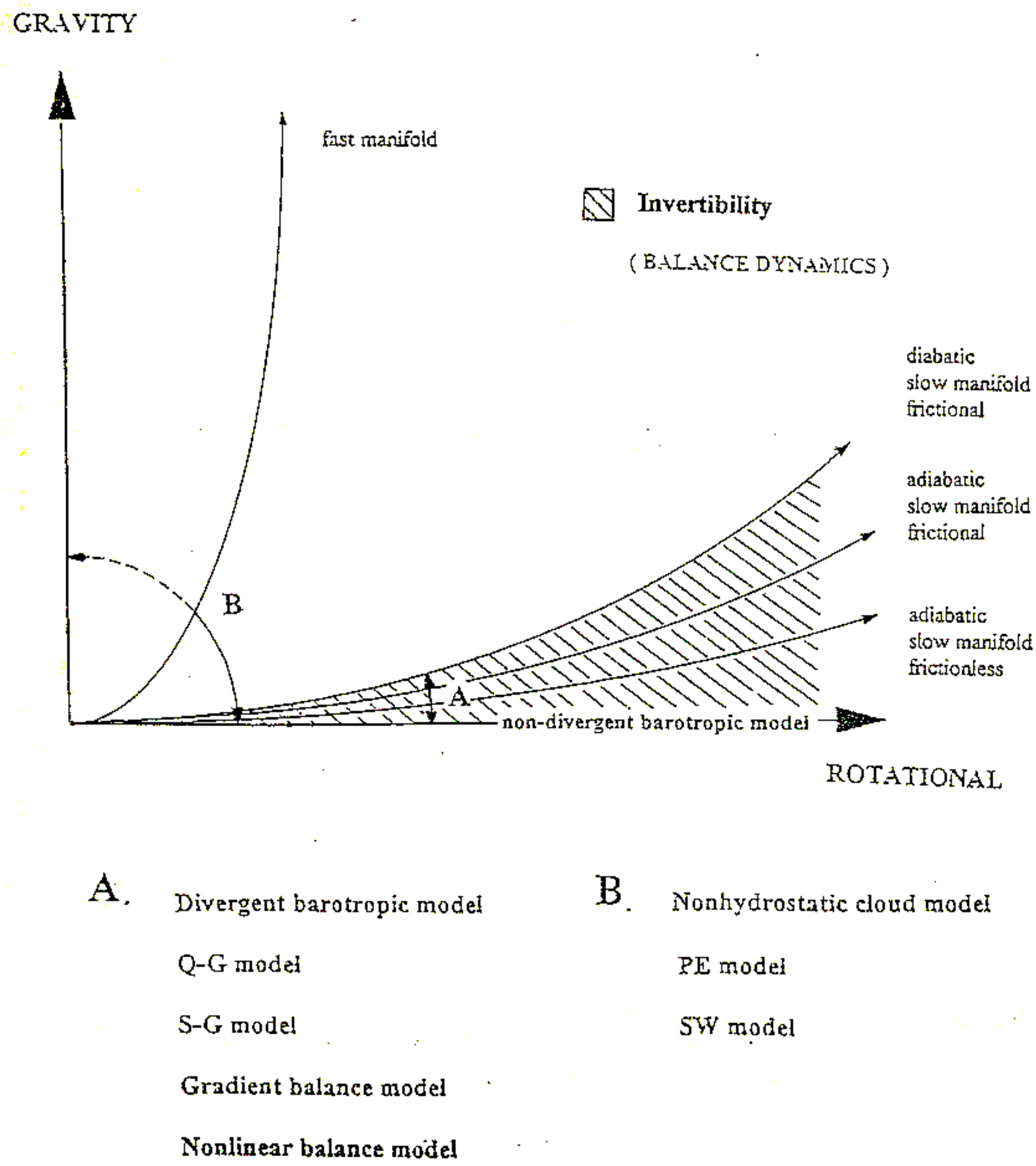


圖 3.2　根據 Leith（1980）提出的理念所繪出的流形（manifold）的示意圖。圖中橫軸代表純粹的地轉平衡，縱軸代表純粹的重力波。曲線代表各種不同現象之運動，在斜率逐漸增加的過程中，是由慢速流形逐漸趨向快速流形。圖下所列的模式是能夠模擬該範圍內現象之模式。（摘自 陳，1995）

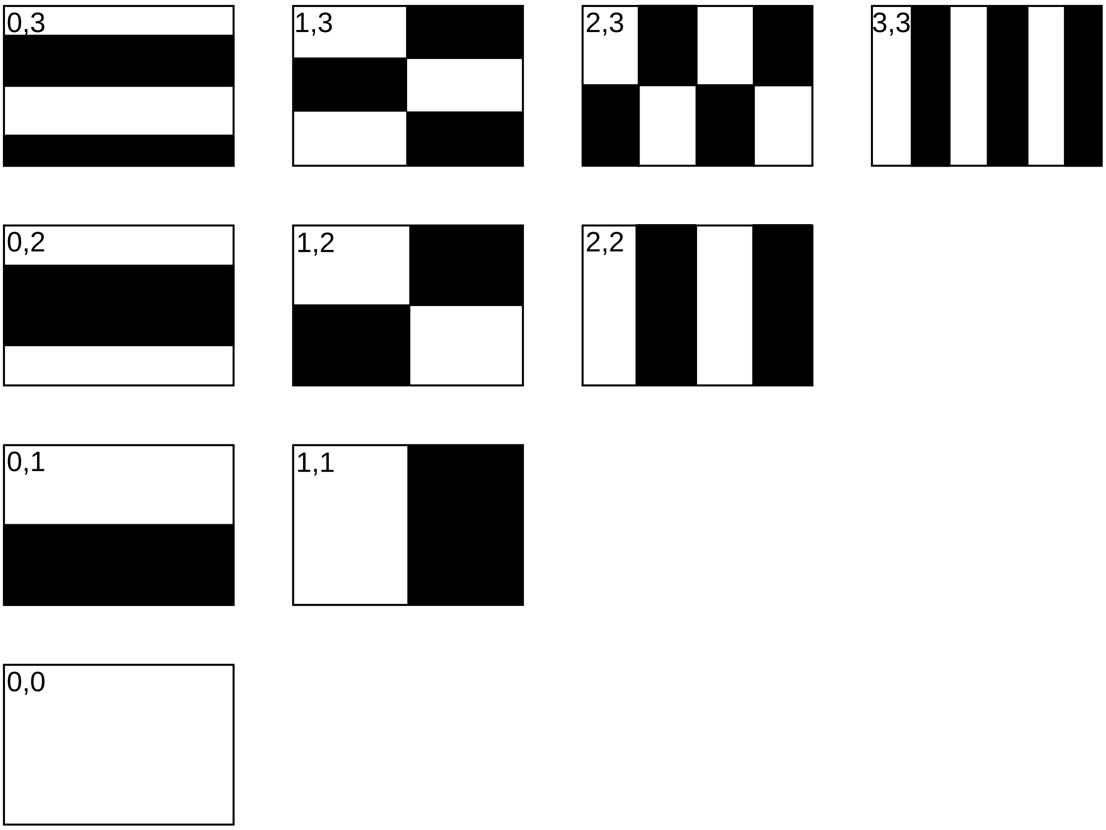


圖 3.3　球面諧函數在總波數（n）小於等於 3 時，節線分佈的示意圖，圖中左上角的數字 m, n 分別為緯向波數及總波數。（After Durran, 1998）

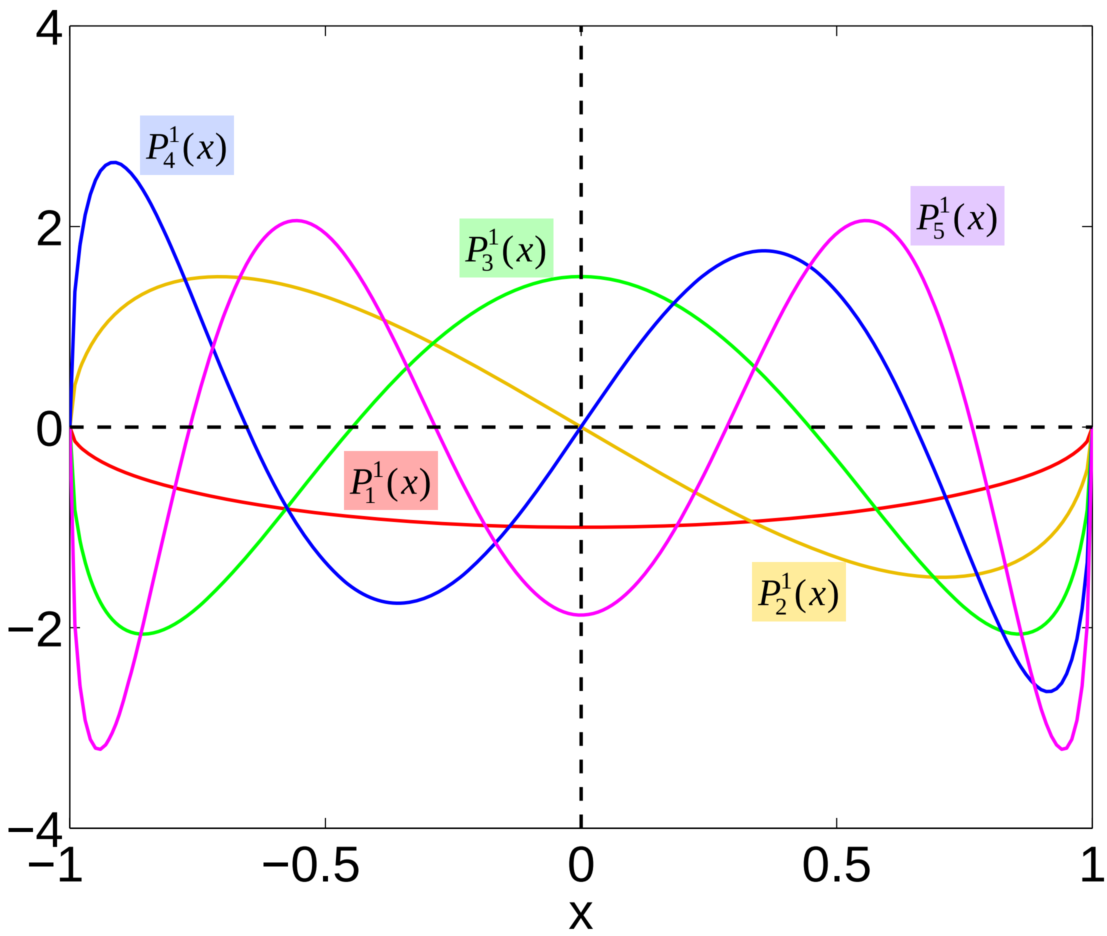


圖 3.4　緯向波數皆為 1，總波數為 1 到 5，相當於經向波數為 0 到 4 之連帶勒壤得多項式。

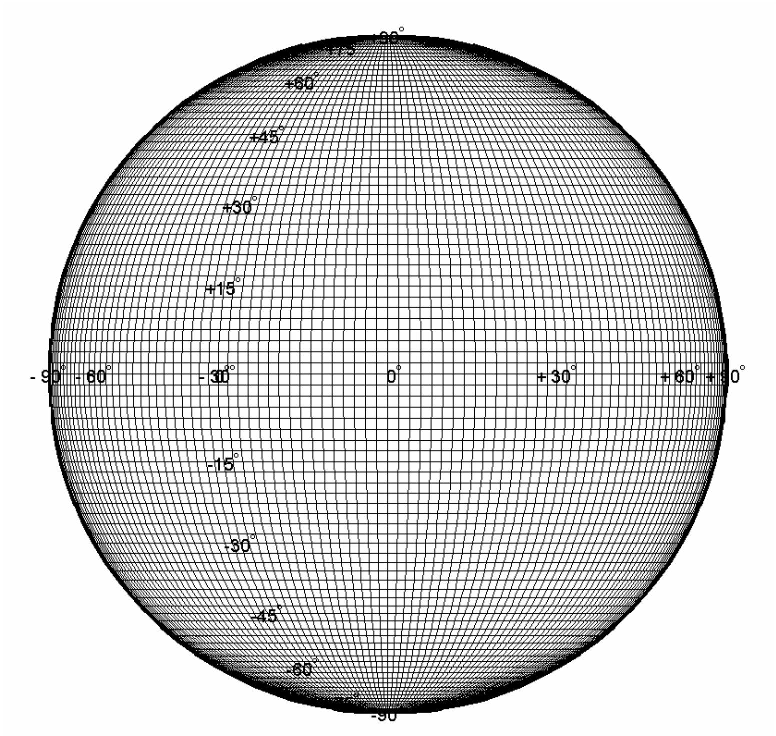
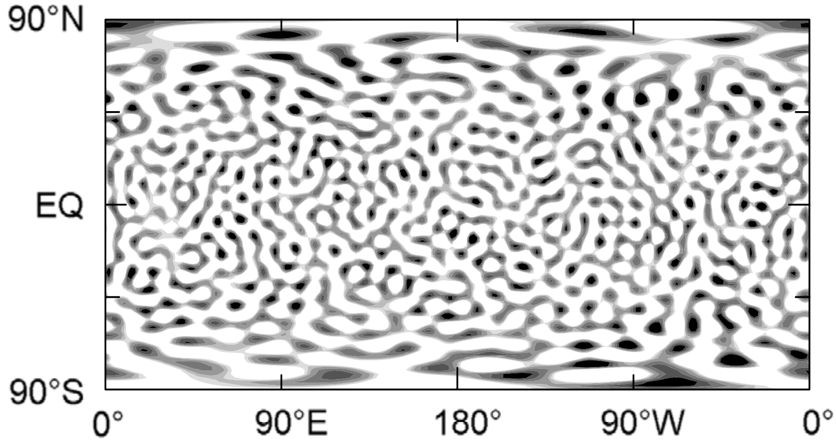


圖 3.5　T64 的全球網格點分佈圖。全球共有192×96個網格點，網格點間距為 1.875°，在赤道上約為 208 公里。

(a)



(b)

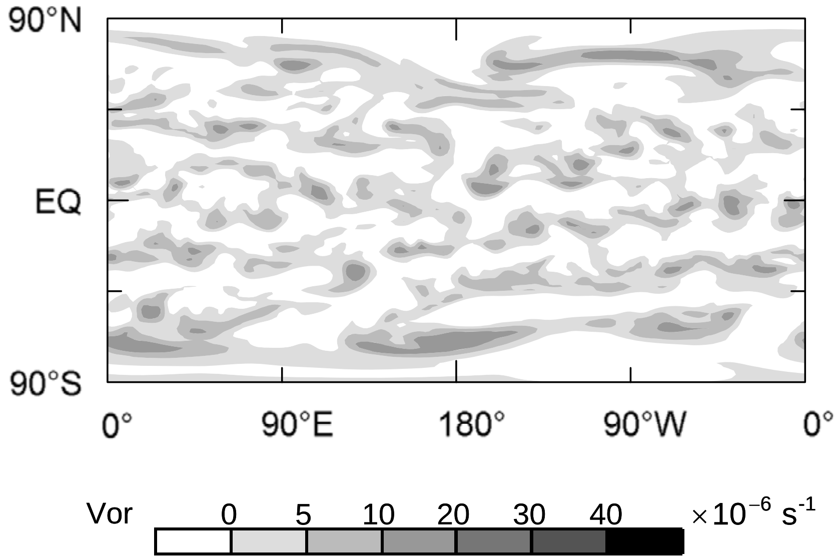


圖 3.6　使用我們的球面諧函數正壓波譜模式，做衰減亂流實驗的物理空間渦度場，使用圓柱等間距投影法。(a) 為初始亂流場，(b) 為積分 80 天後的結果，顯示渦度明顯呈現帶狀的分佈。圖中為求清晰，僅繪出正渦度的部分。

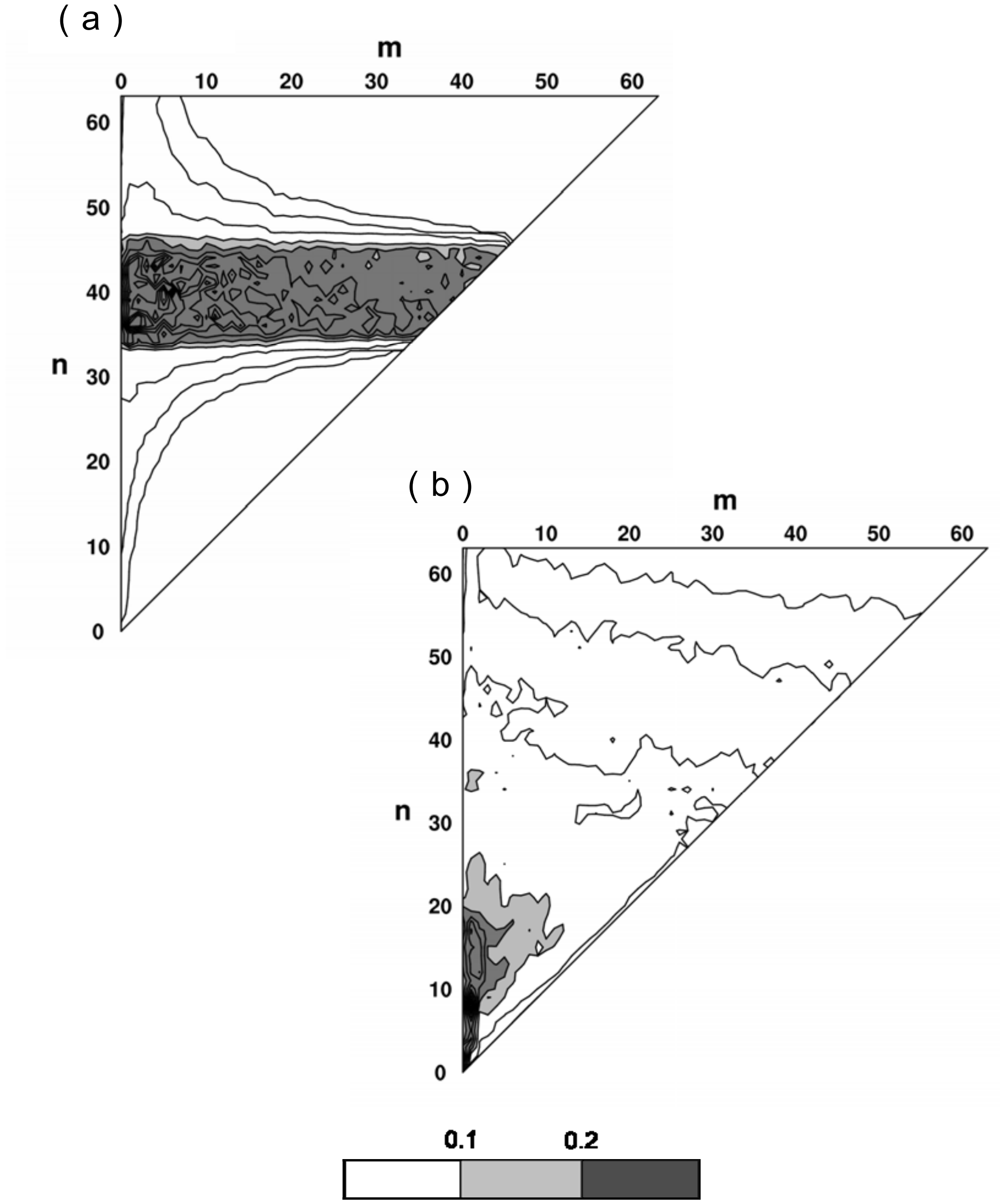
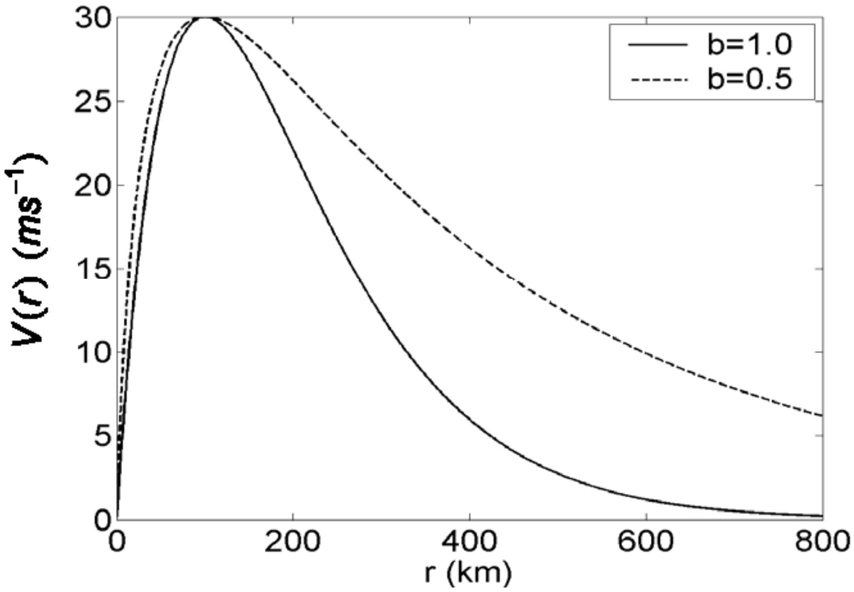


圖 3.7　二維能量波譜分析十組實驗系集平均的結果，圖中橫軸為緯向波數，縱軸為總波數，圖中最大值標準化為1，值超過0.1的區域為淺灰色，超過0.2的區域為深灰色。(a) 為衰減亂流實驗的初始場，顯示初始能量聚集在總波數35～45之間。(b) 為積分 80 天後的分析結果，清楚顯示能量聚集在一個類似漏斗形狀的區域中，顯示動能反串跌到緯向結構中。

(a)



(b)

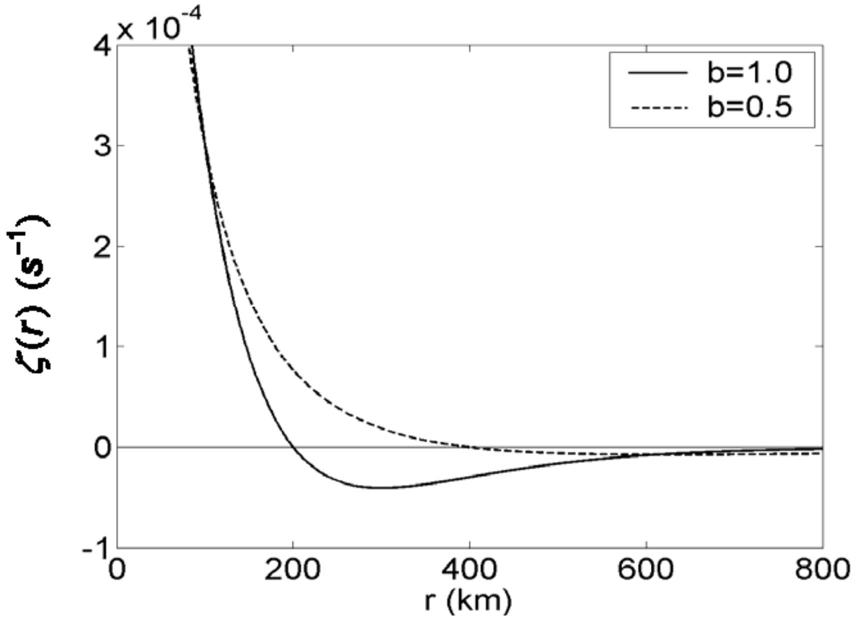


圖 4.1　DeMaria and Chan（1984）雙渦旋交互作用實驗所使用的渦旋，（a）為風場之徑向分佈。（b）為渦度場之徑向分佈，顯示當 $b=1.0$ 時，中心渦旋外側存在負渦度區。

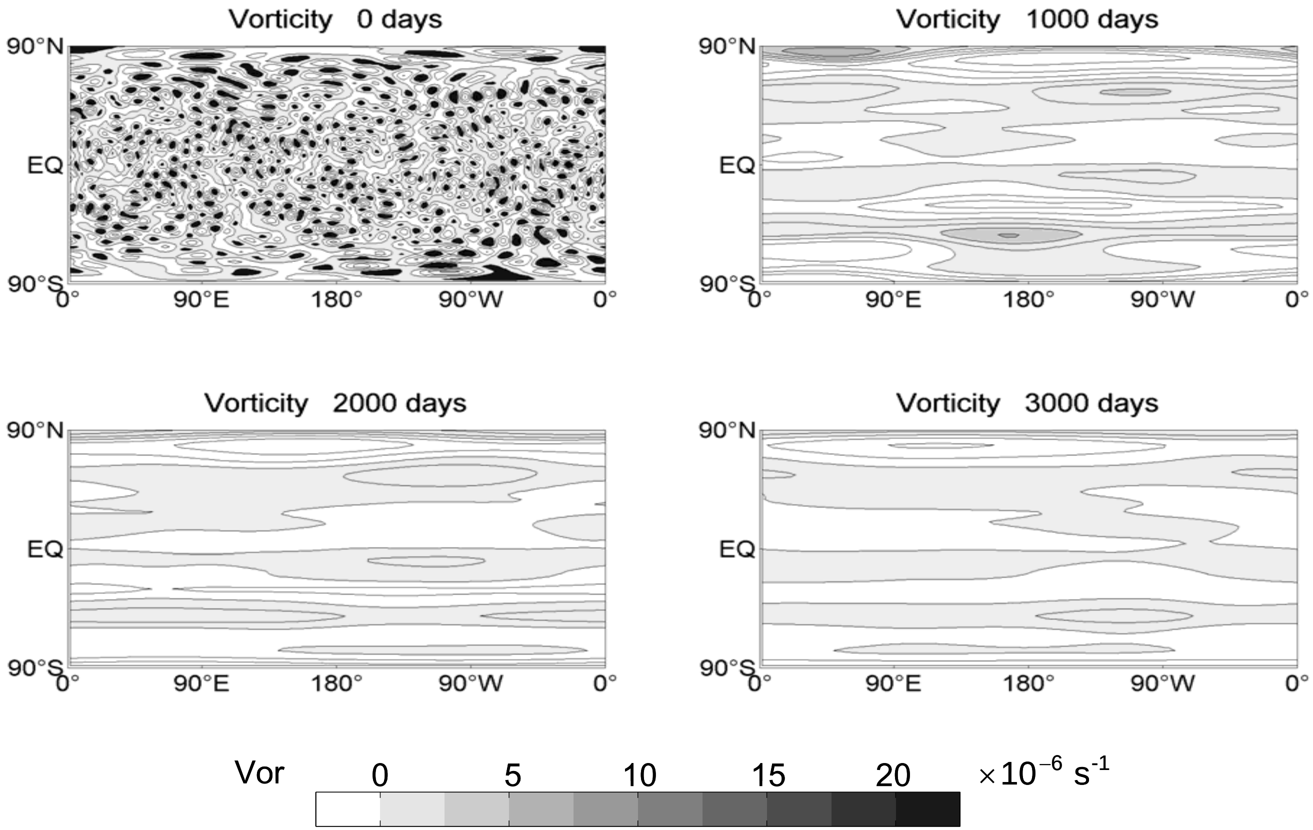


圖 4.2　初始為亂流渦度場（實驗 A）之物理空間渦度場隨時間的變化，陰影區域為正渦度區，顏色愈深表示渦度愈強。初始場植入亂流，積分 1000 天後，出現大尺度的緯向渦度帶，但由於有衰減項，渦度帶的強度隨時間遞減。

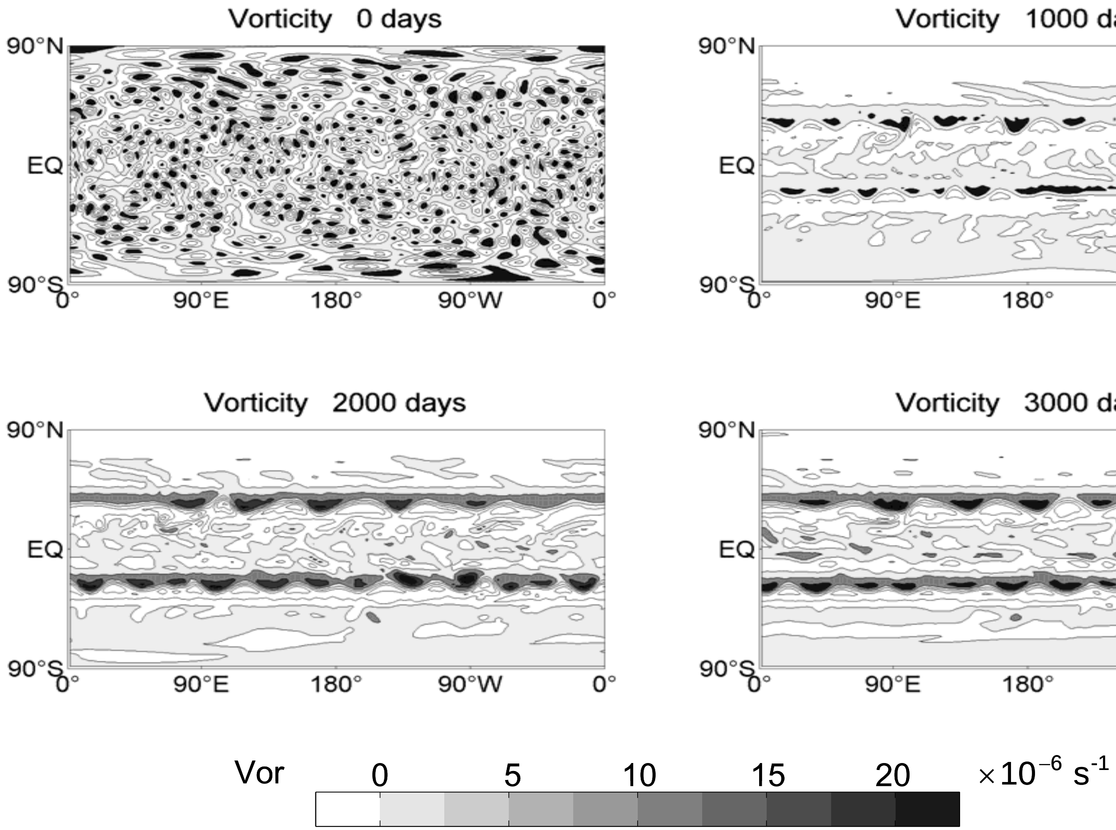
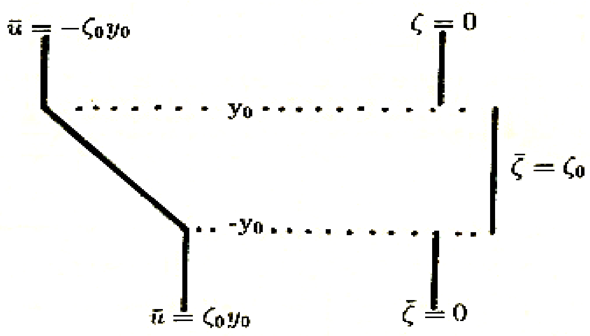


圖 4.3 植入二 DC 渦旋與亂流場（實驗 B）之物理空間渦度場隨時間的變化。初始在 20˚N，90˚E 以及 20˚S，90˚W 的位置植入渦旋，積分 1000 天後，在南北緯 20 度的地方出現帶狀的渦度分佈，積分至 3000 天時，此二條渦度帶更加明顯。

(a)



(b)

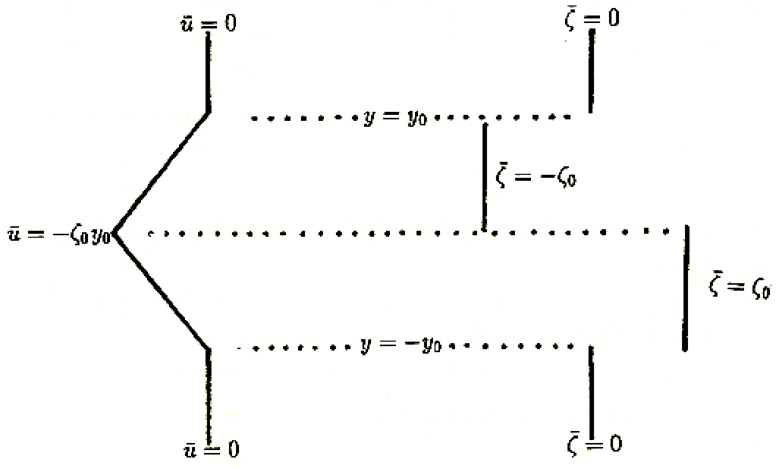


圖 4.4　(a) 背景場為 3 區域（雙曲切向風切）之緯向平均緯向風，和緯向平均渦度場隨經度變化之分佈圖。(b)背景場為 4 區域(比克萊東風噴流）之緯向平均緯向風，和緯向平均渦度場隨經度變化之分佈圖。（摘自 Kuo et al., 1994）

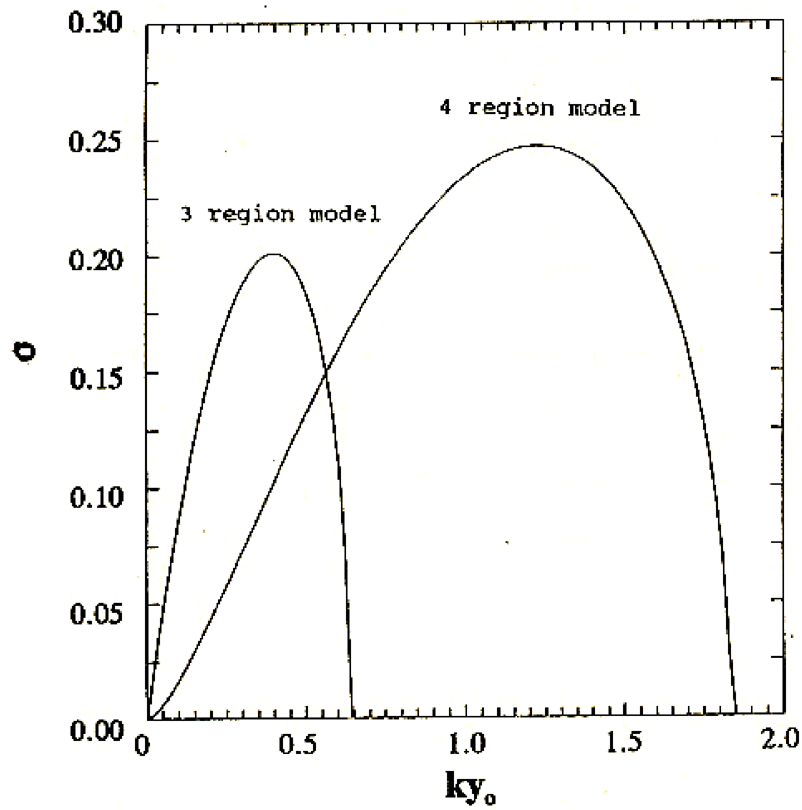


圖 4.5　橫軸為無因次化波長（ky_0），縱軸為無因次化成長率（σ），對 3 區域的背景場來說，不穩定發生於當 $0 \le ky_0 \le 0.6392$，最大不穩定發生於當 $ky_0 = 0.3984$；對 4 區域的背景場來說，不穩定發生於當 $0 \le ky_0 \le 1.8291$，最大不穩定發生於當 $ky_0 = 1.2261$。（摘自 Kuo et al., 1994）

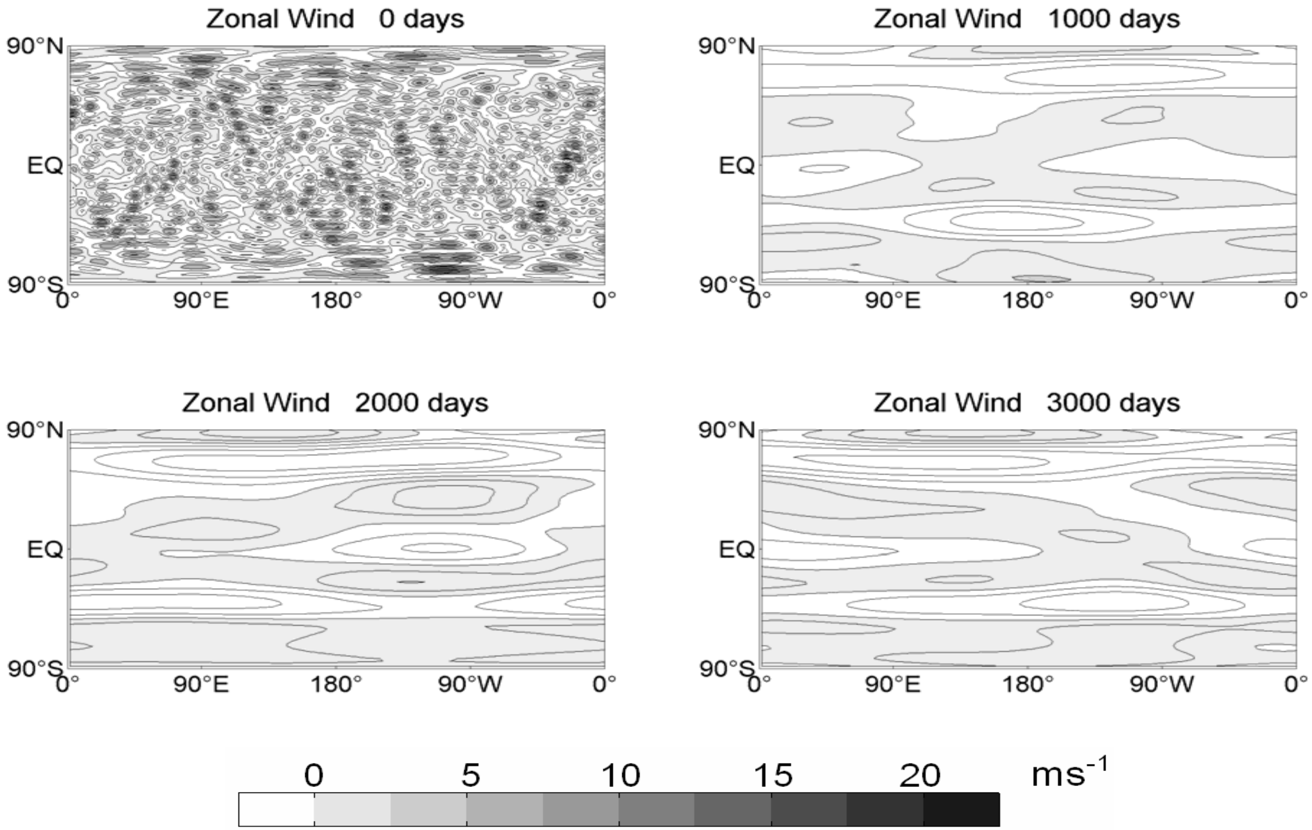


圖 4.6　實驗 A 之物理空間緯向風場隨時間的變化，陰影區域代表西風，顏色愈深表示西風愈強。在積分至 1000 天時出現大尺度的西風帶。

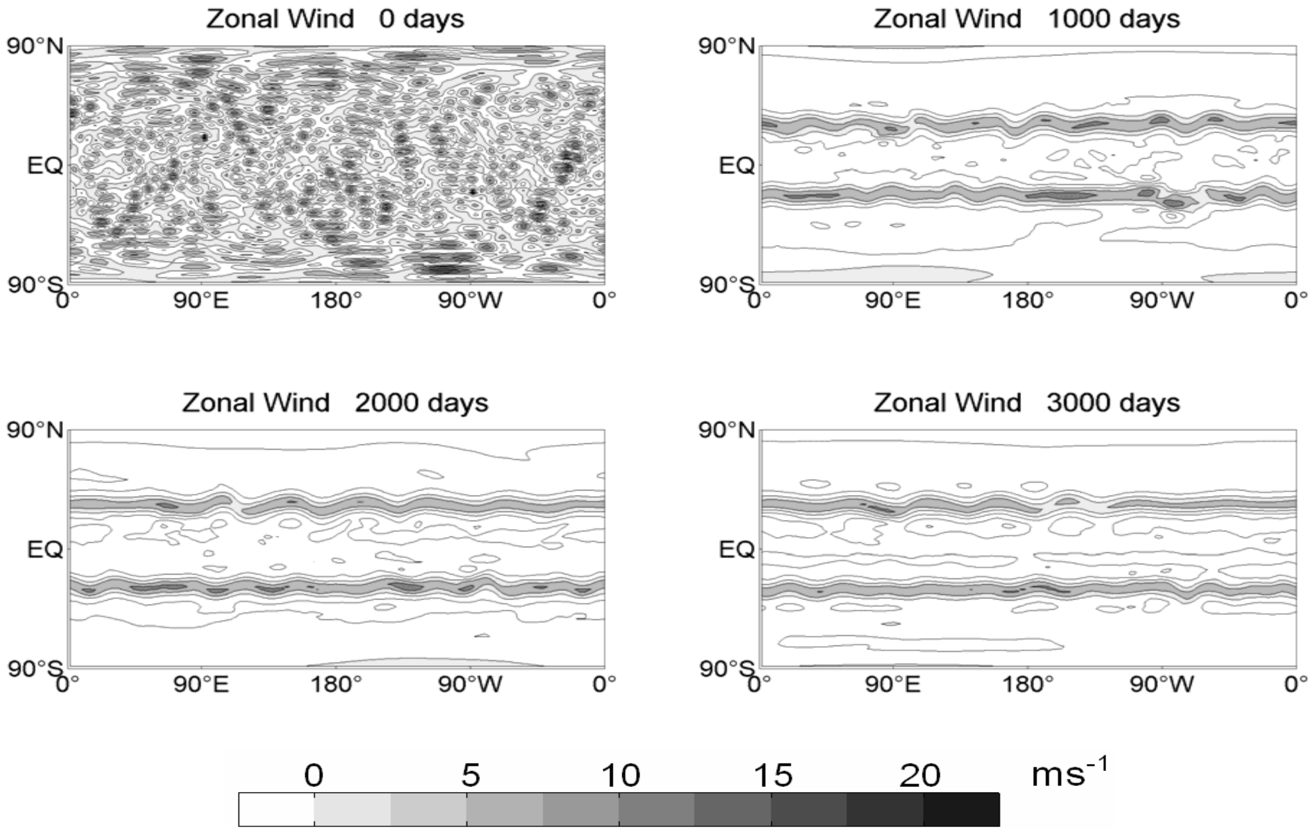
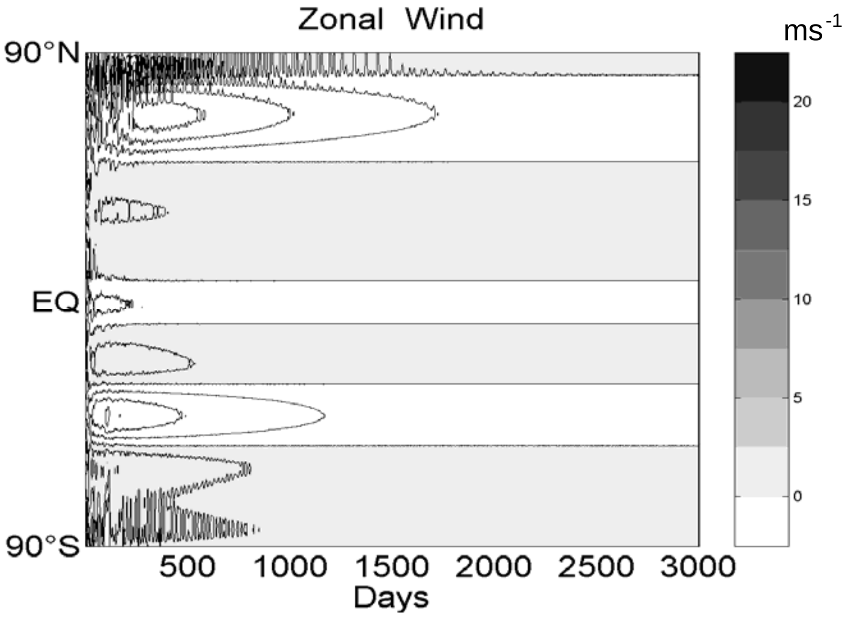


圖 4.7　實驗 B 之物理空間緯向風場隨時間的變化，積分至 3000 天時，在 36˚N 與 32˚S 處出現明顯西風帶，寬度分別約為 1200 及 1400 公里。

(a)



(b)

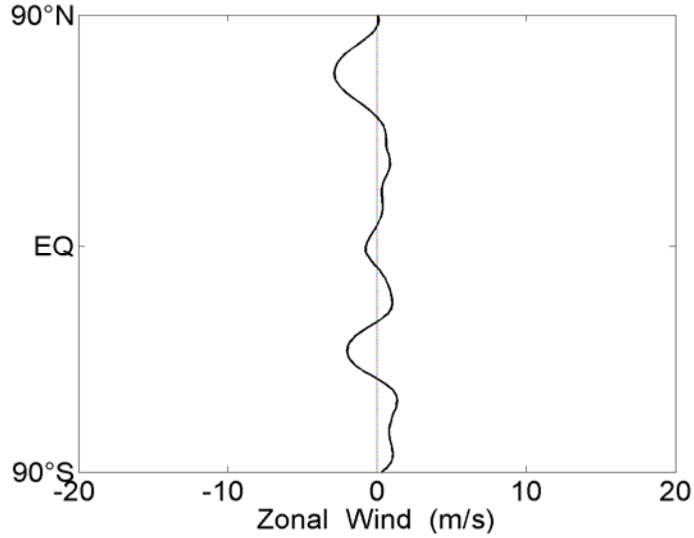
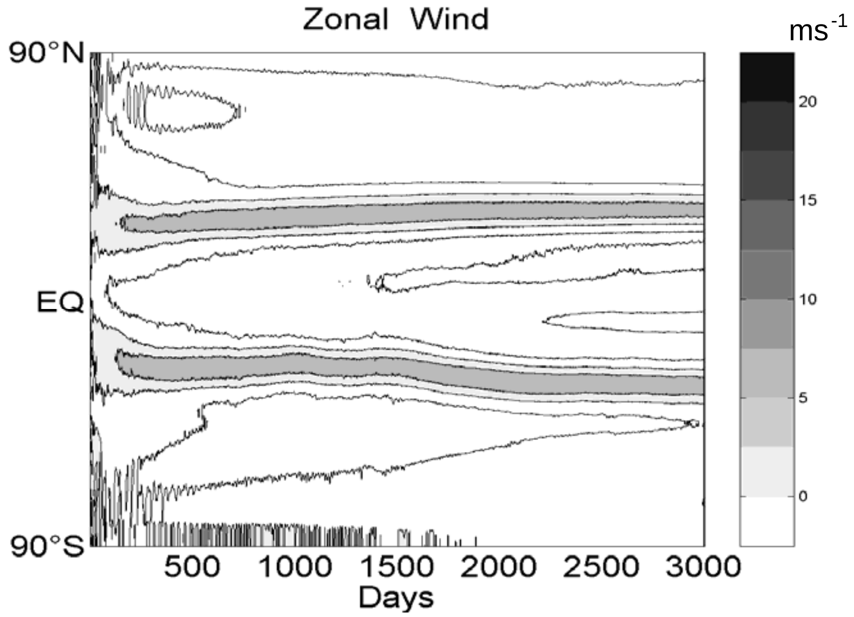


圖 4.8　（a）實驗 A 之緯向平均緯向風隨時間的變化。陰影區域代表西風，顏色愈深代表西風愈強，白色區域代表東風。由於有衰減項，緯向風隨時間減弱。（b）實驗 A 之緯向平均緯向風取 3000 天的時間平均，顯示形成了許多風帶，但強度不強。

(a)



(b)

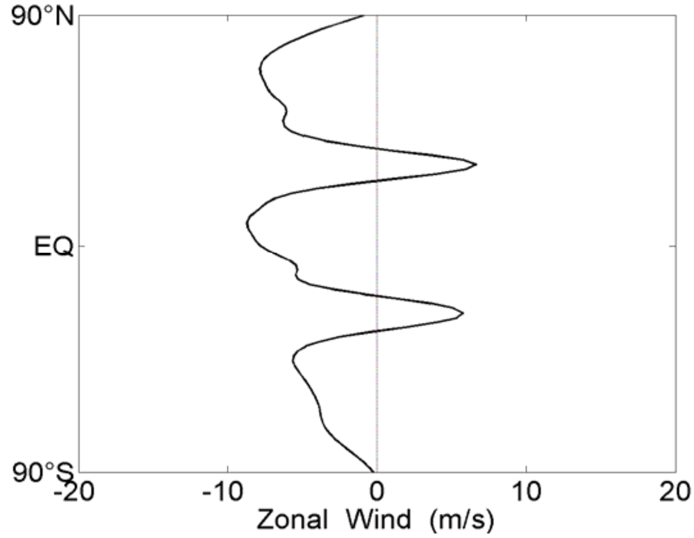


圖 4.9　（a）實驗 B 之緯向平均緯向風隨時間的變化。顯示在植入渦旋的附近出現明顯的西風帶，且有向高緯度移動的趨勢。（b）實驗 B 之緯向平均緯向風取 3000 天的時間平均，顯示在植入渦旋的附近出現明顯的西風分量，最大值分別位於32˚N 以及 26˚S，經向寬度約為 1400 公里。

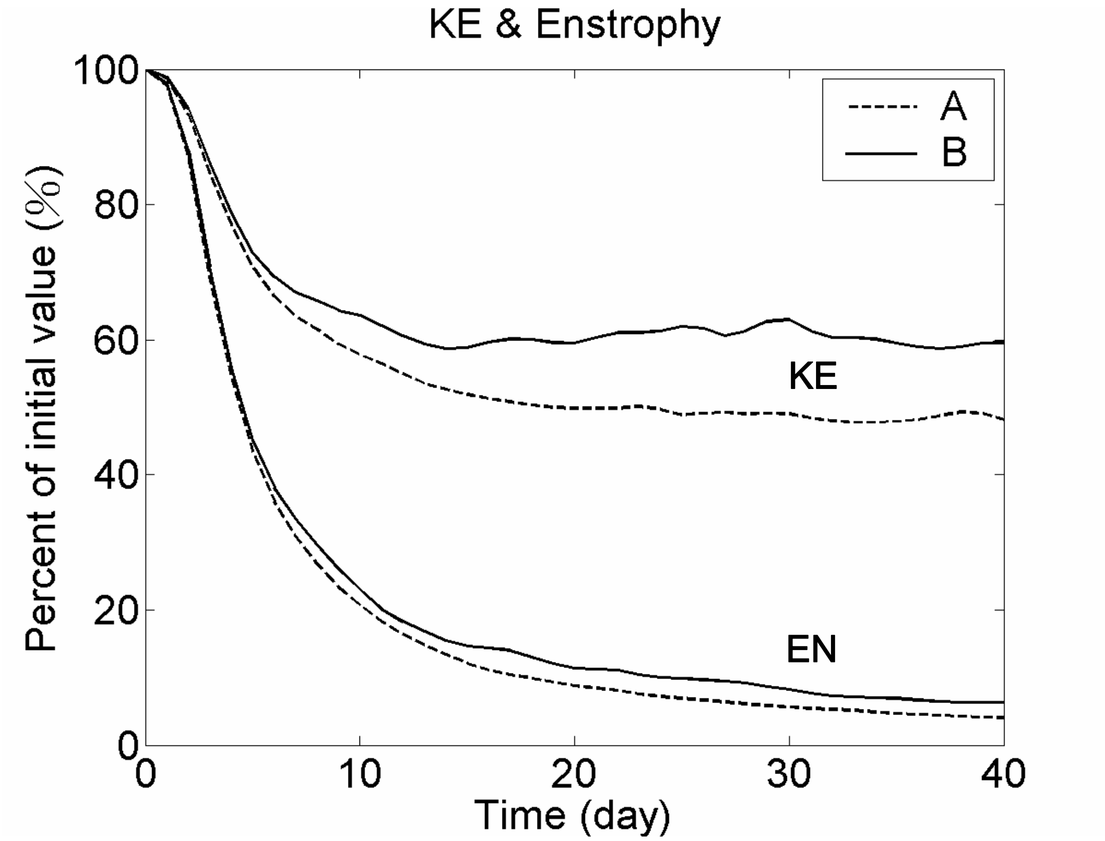


圖 4.10　動能(KE)與渦度擬能(EN)隨時間的變化，虛線為實驗 A，實線為實驗 B。由於有背景的行星渦度梯度，系統會激發β羅士比波將能量帶走，能量愈分散則衰減愈快，因此動能有大約 40％的衰減；比較 KE 與 EN 顯示二維亂流選擇性衰減的性質。實驗 B 由於有植入渦旋，增強其非線性平流效應，可抵抗模式中的消耗項以及能量頻散的衰減效應，因此動能與渦度擬能隨時間的遞減值較實驗 A 小。

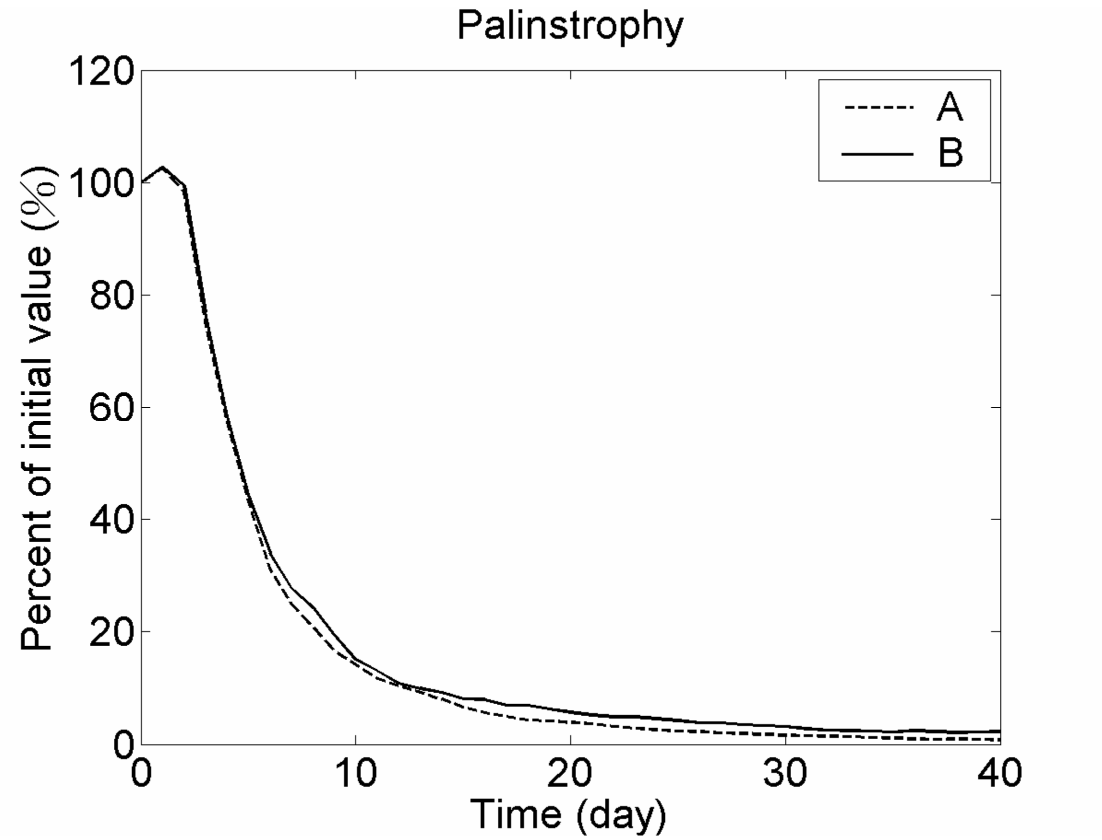


圖 4.11　Palinstrophy 隨時間的變化，虛線為實驗 A，實線為實驗 B。初始 Palinstrophy 隨時間增加，是攪動的過程；過了最大值後隨時間快速遞減，是混合的過程。實驗 B 由於有植入渦旋，非線性平流效應較顯著，渦度較強，渦度梯度較大，因此 Palinstrophy 的值略大於實驗 A。

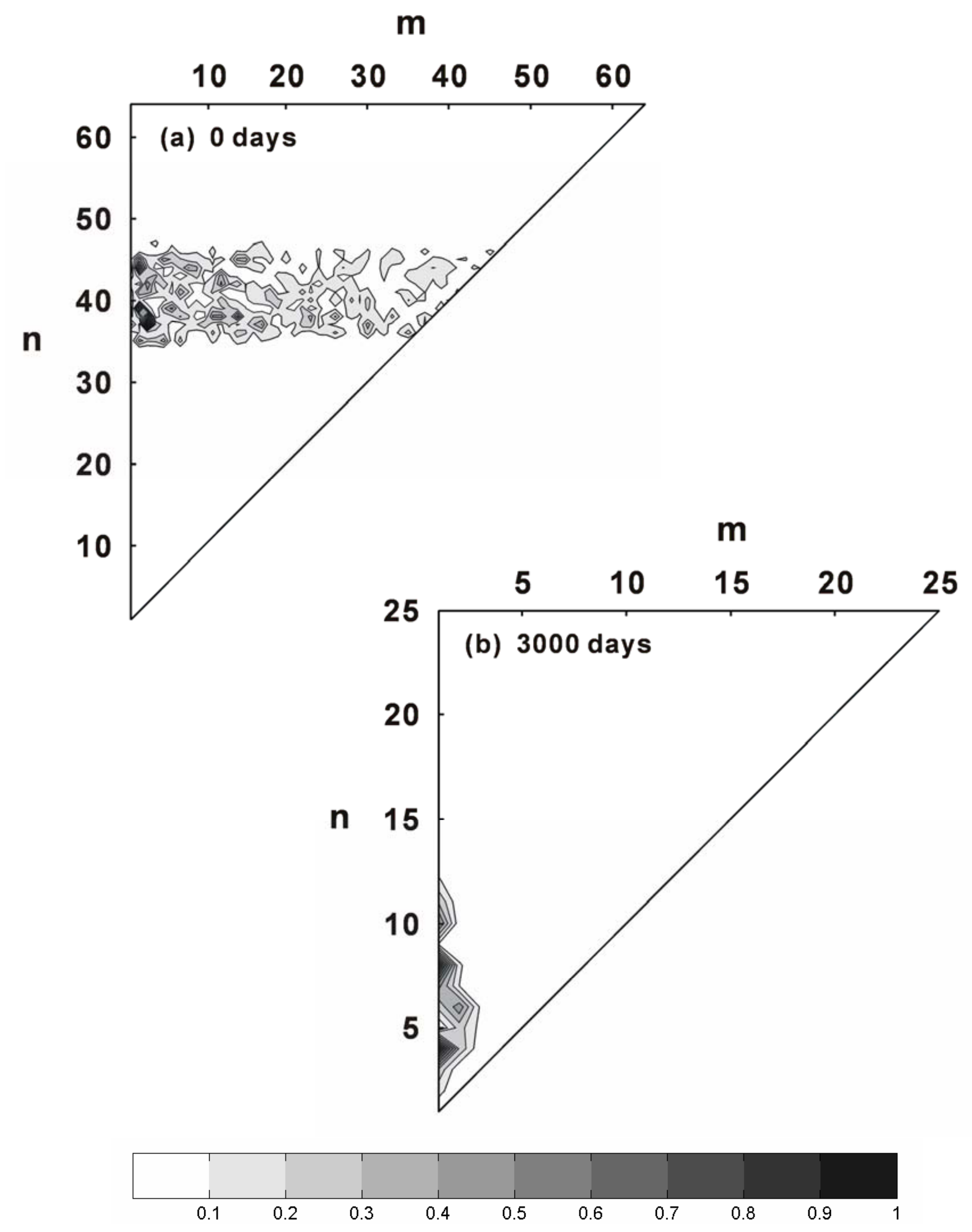


圖 4.12　初始為亂流渦度場（實驗 A）之二維能量波譜分析之結果。橫軸為緯向波數，縱軸為總波數，圖中最大值標準化為 1。(a) 為初始場，在總波數 35 ~ 45 給能量；(b) 為積分 3000 天後的結果，由於能量皆聚集在左下方波數較小的區域，為了清楚表示，僅繪出總波數小於 25 的區域，顯示能量最終聚集在緯向調和波中。

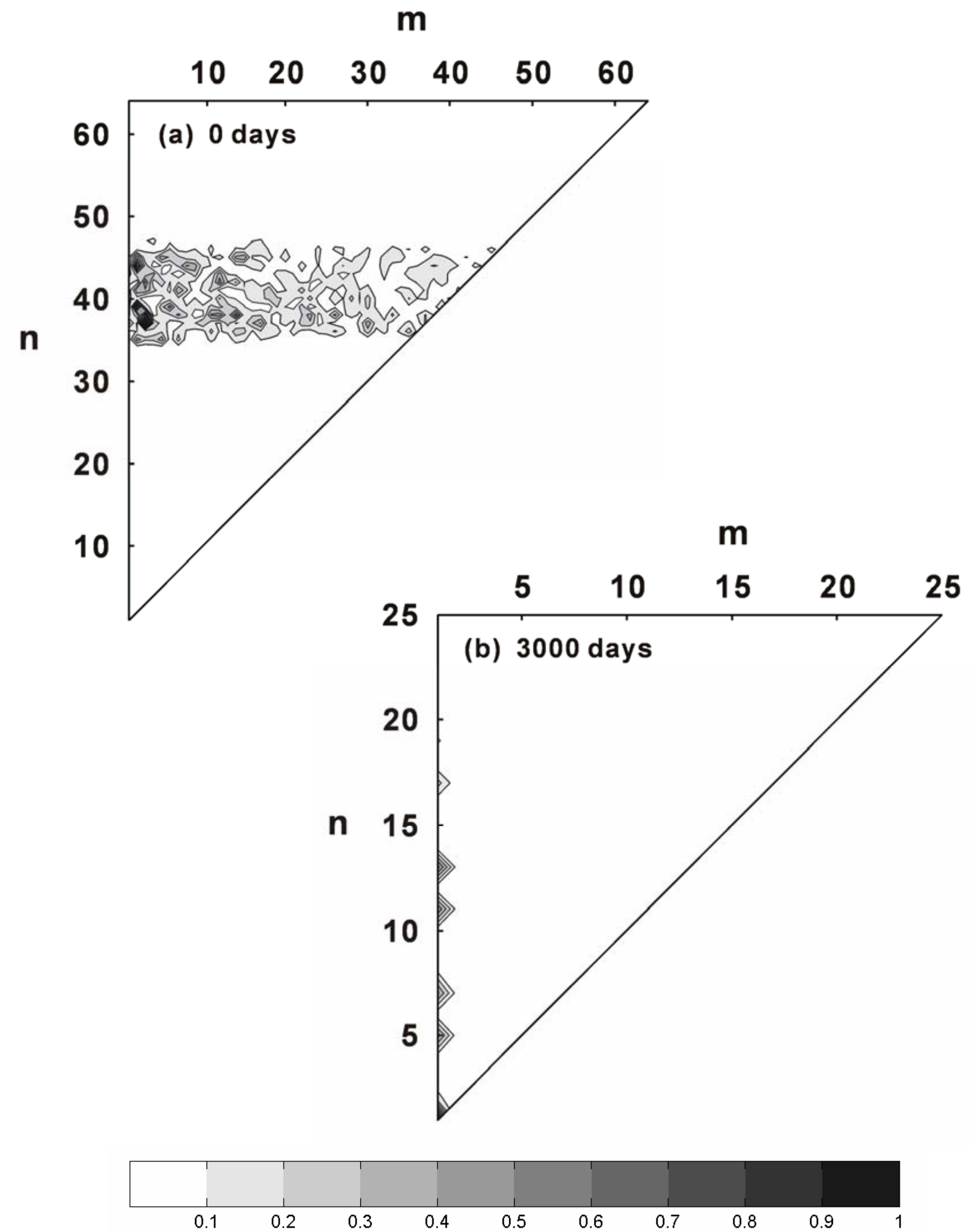
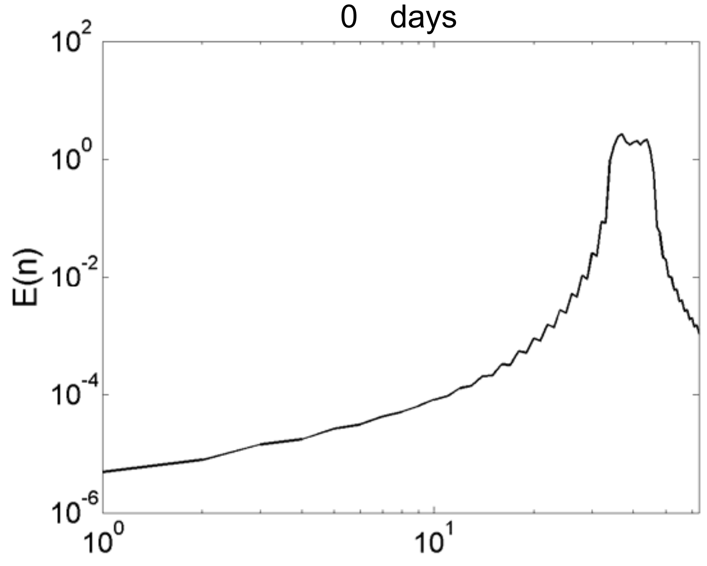


圖 4.13　植入二 DC 渦旋與亂流場（實驗 B）之二維能量波譜分析之結果。（a）在 $n = 35 - 45$ 之間給能量，再植入二個渦旋之初始場的分析結果。（b）為積分 3000 天後的結果，顯示能量最終聚集在數個最低緯向波數的緯向調和波中。

(a)



(b)

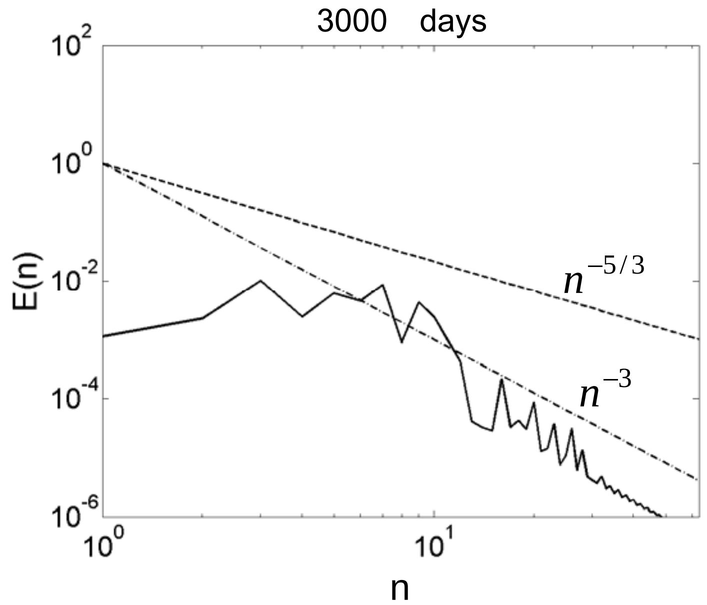
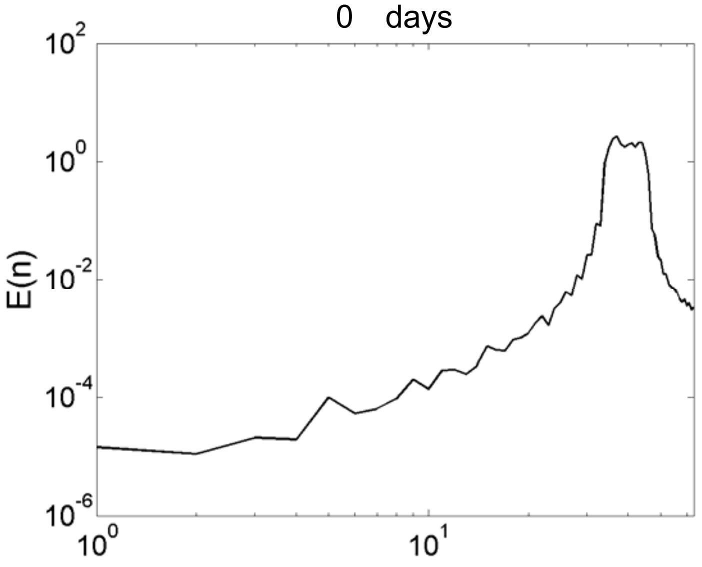


圖 4.14 初始為亂流渦度場（實驗 A）之一維雙對數座標能量波譜分析結果。橫軸為總波數（n），縱軸為動能波譜。圖（a）為初始場，顯示在 $n = 35 - 45$ 之間有高峰值。圖（b）為積分 3000 天後的結果。圖中虛線為 $n^{-5/3}$，點虛線為 n^{-3}。顯示在 $10 \le n$ 的範圍斜率為 -3，$3 \le n \le 10$ 的範圍斜率近似於 $-5/3$。

(a)



(b)

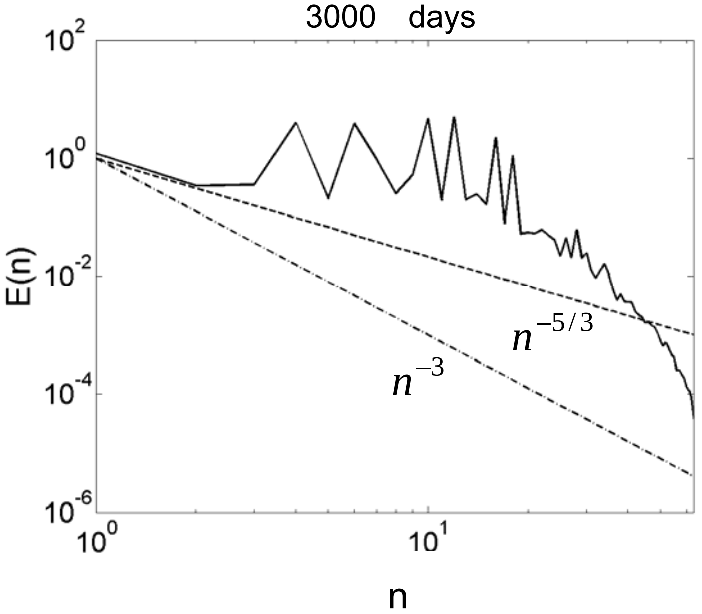
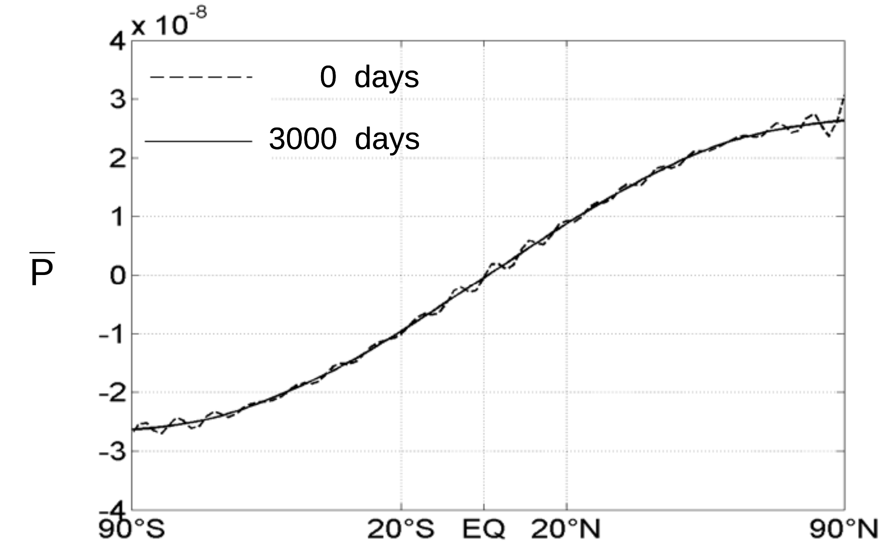


圖 4.15　植入二 DC 渦旋與亂流場（實驗 B）之一維雙對數座標能量波譜分析結果。圖（a）為初始場，顯示由於加入渦旋而產生振盪。圖（b）為積分 3000 天後的結果。圖中虛線為$n^{-5/3}$，點虛線為n^{-3}。顯示在$20 \le n \le 40$的範圍斜率為-3，$n \le 20$的範圍斜率近似於$-5/3$。

(a)



(b)

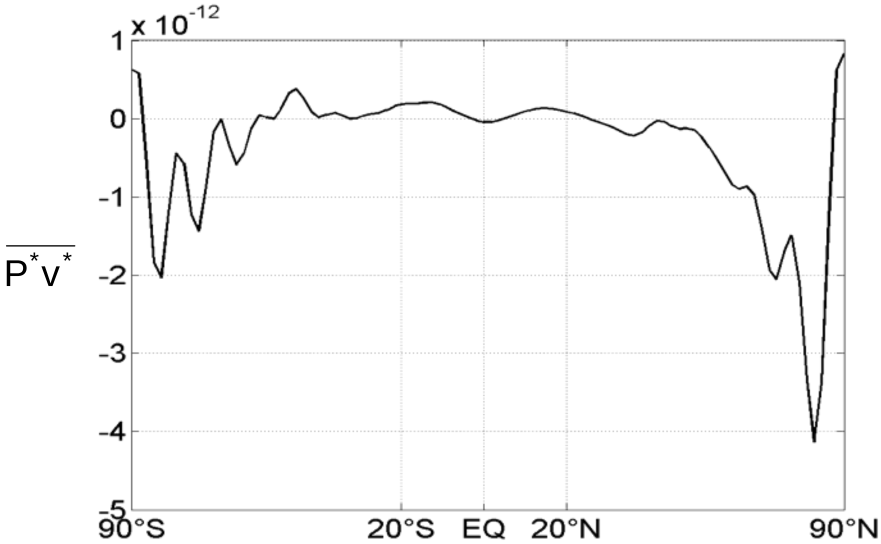
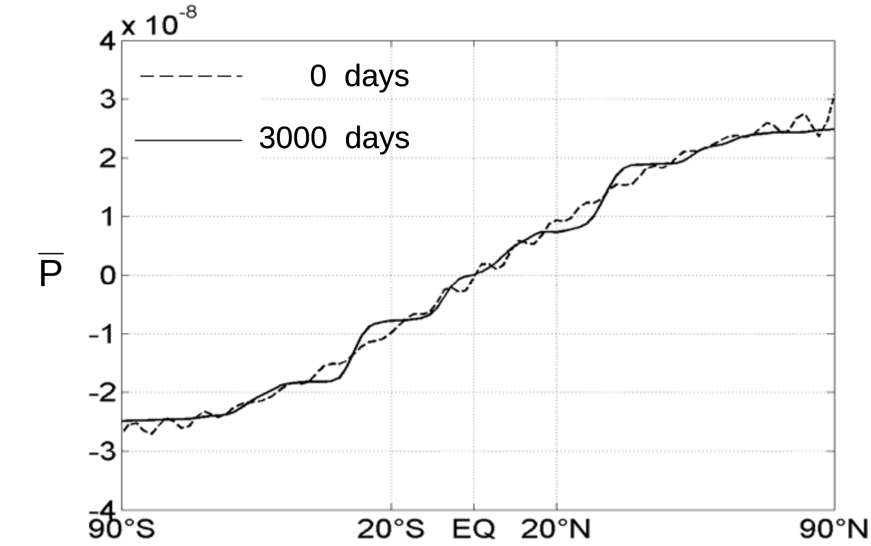


圖 4.16　初始為亂流渦度場（實驗 A）之（a）為緯向平均位渦（$\overline{P}$）隨緯度的分佈，最終顯示緯向平均位渦曲線隨緯度分佈平滑。（b）為積分 3000 天後，緯向平均經向擾動位渦通量（$\overline{P^*v^*}$）隨緯度的分佈。

(a)



(b)

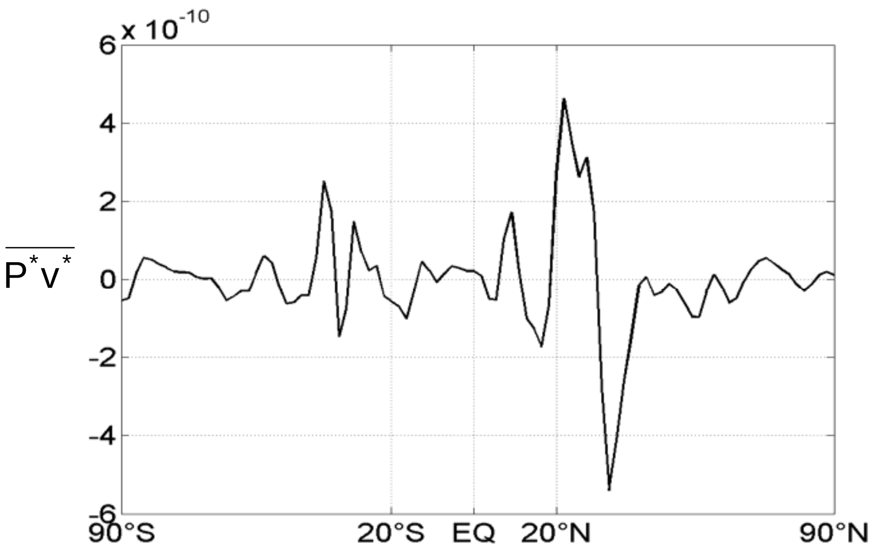


圖 4.17　植入二 DC 渦旋與亂流場（實驗 B）之（a）為緯向平均位渦（$\overline{P}$）隨緯度的分佈，在南北緯 25 度附近位渦隨緯度幾乎沒有變化，梯度緩和，此區域為碎波區（surf zone），其附近位渦梯度很大。（b）為積分 3000 天後緯向平均經向擾動位渦通量（$\overline{P^* v^*}$）隨緯度的分佈，在南北緯 20 度植入渦旋的附近，出現明顯向北位渦通量；北半球正值的部分經向寬度約為 1200 公里。

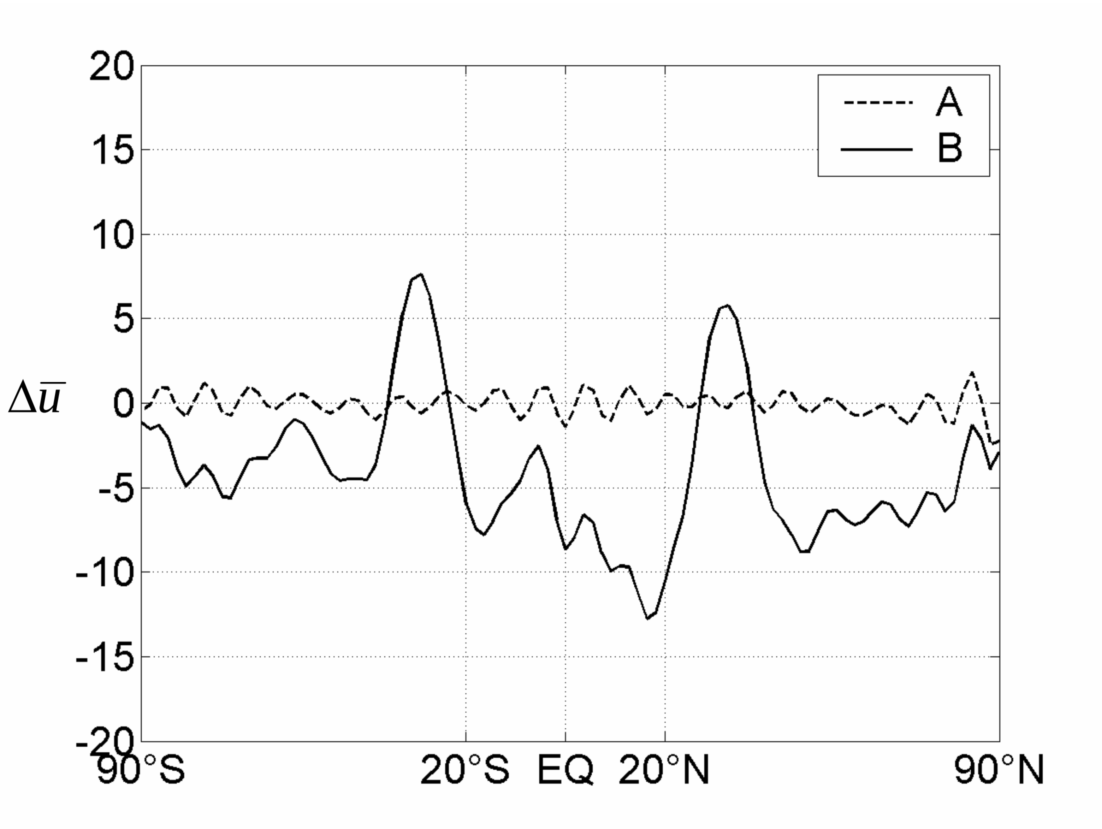


圖 4.18　積分 3000 天與初始場$\overline{u}$之差值，虛線為實驗 A，實線為實驗 B，顯示在植入渦旋的附近$\overline{u}$明顯增加。

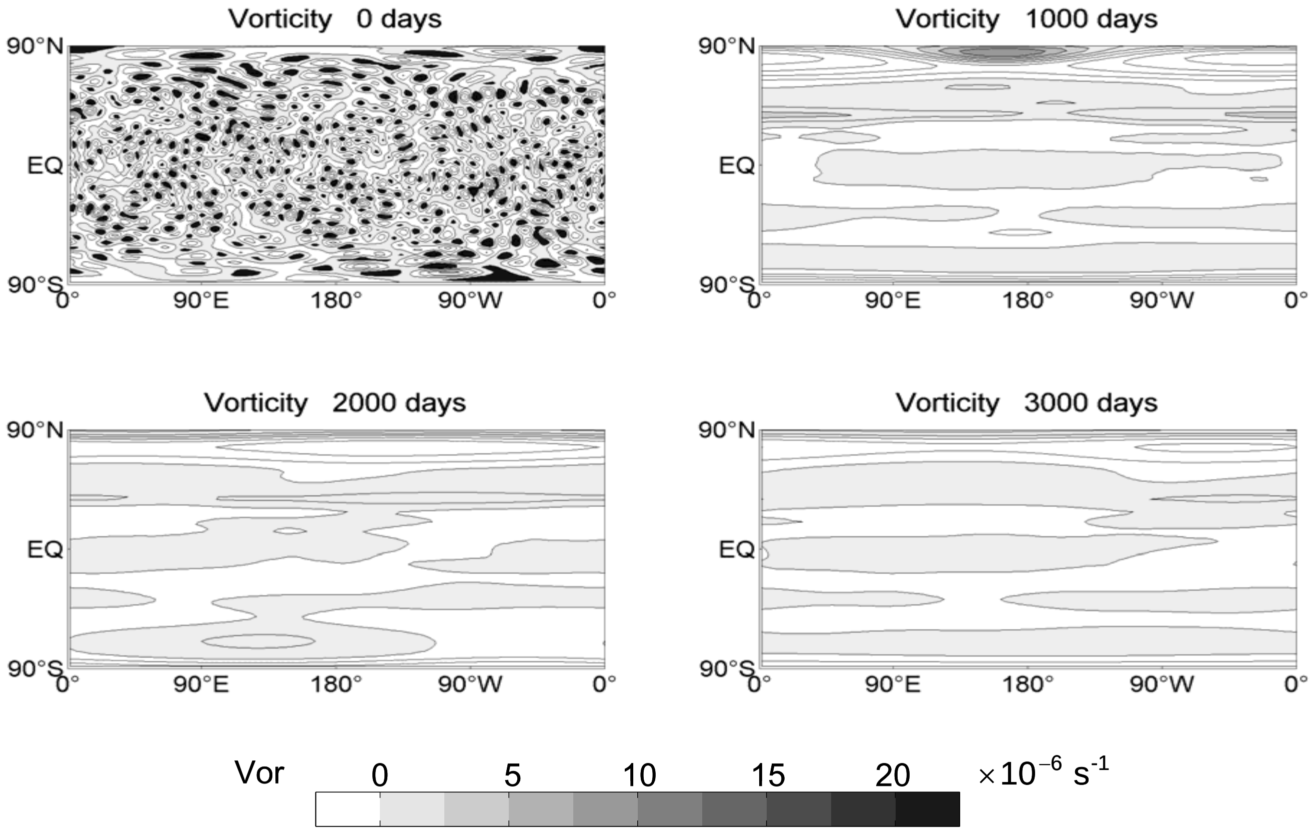


圖 4.19　植入高斯渦旋的實驗，物理空間渦度場隨時間的變化，陰影區域為正渦度區域，顏色愈深表示渦度愈強。在植入渦旋的附近並未出現明顯的渦度帶。由於有衰減項，渦度帶的強度隨時間遞減。

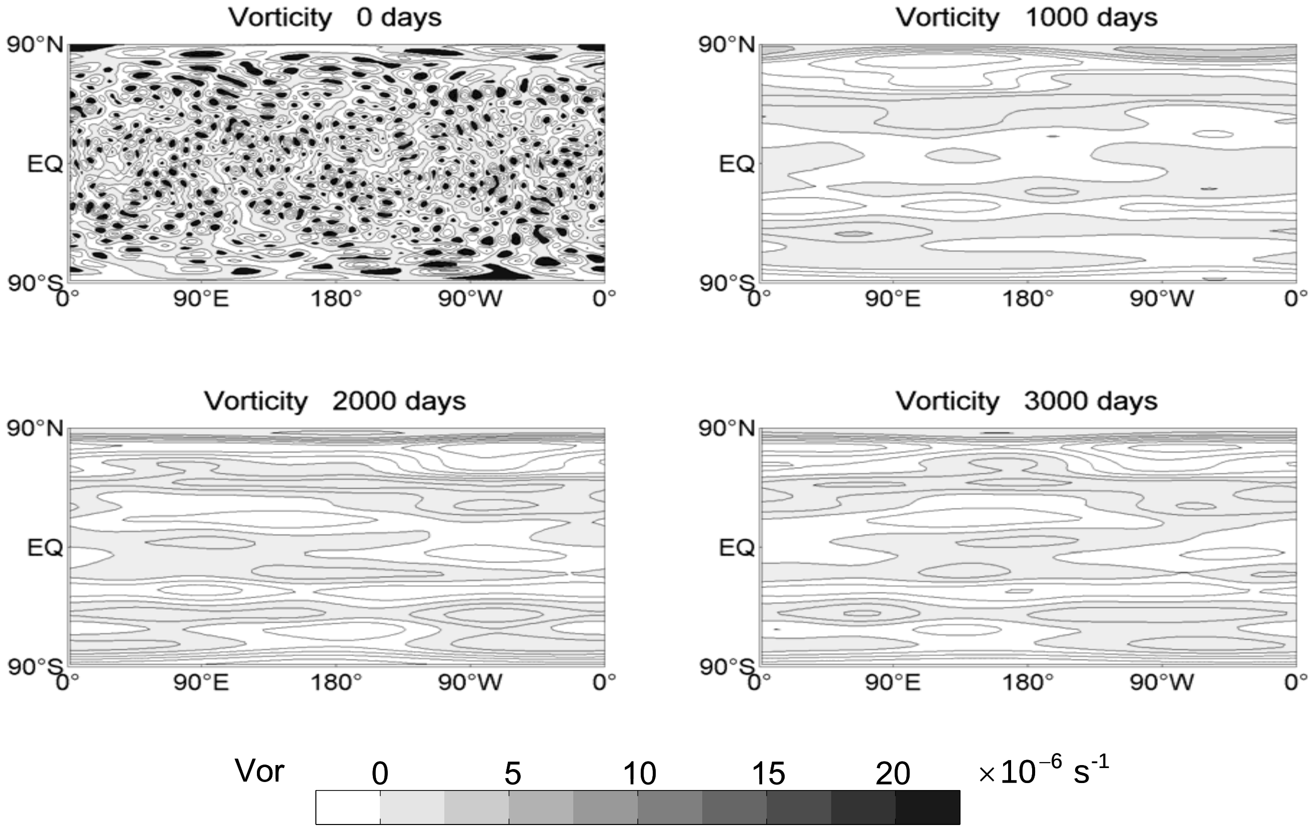


圖 4.20　植入阮肯渦旋的實驗，物理空間渦度場隨時間的變化，陰影區域為正渦度區域，顏色愈深表示渦度愈強。在植入渦旋的附近並未出現明顯的渦度帶。由於有衰減項，渦度帶的強度隨時間遞減。

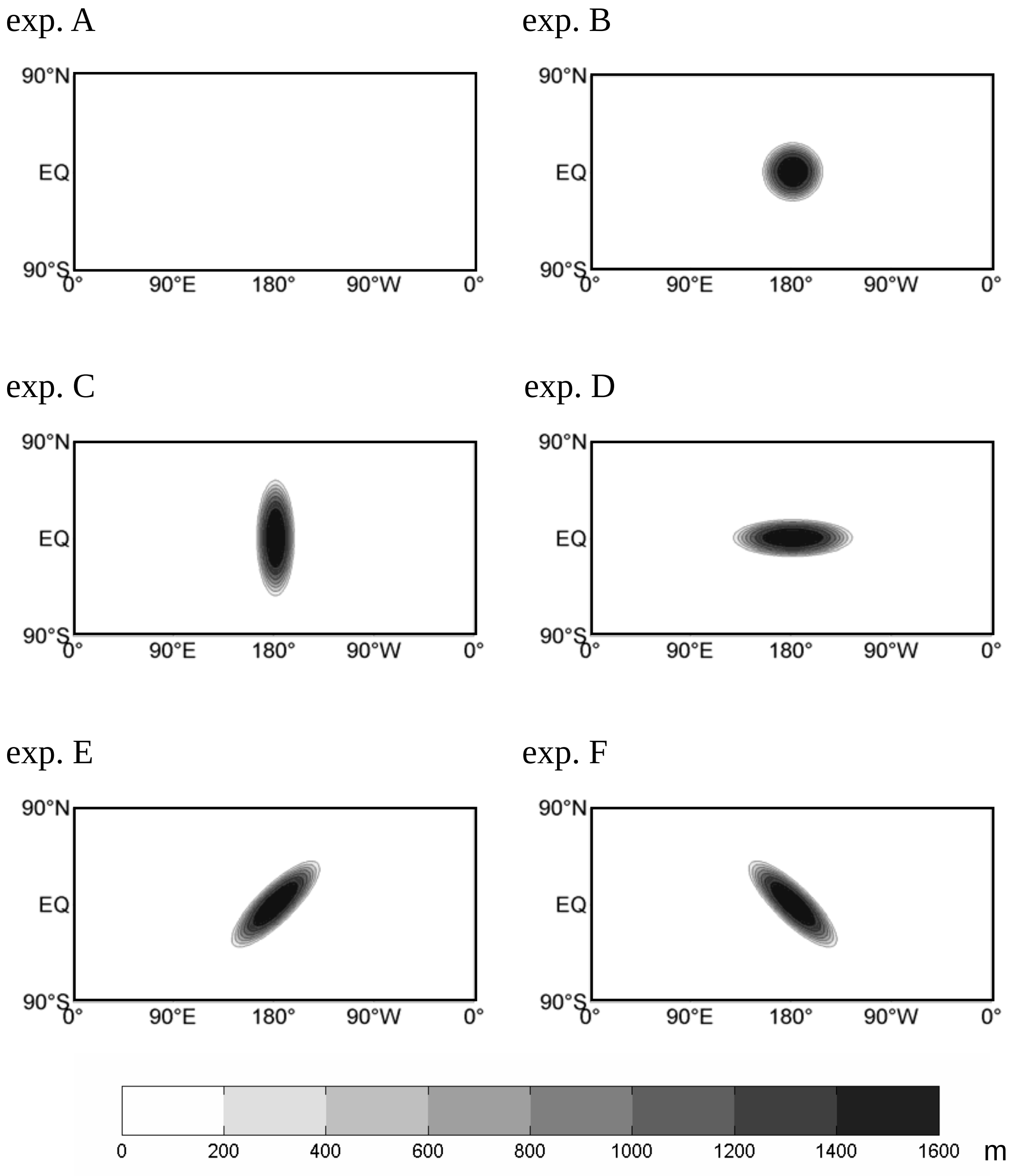
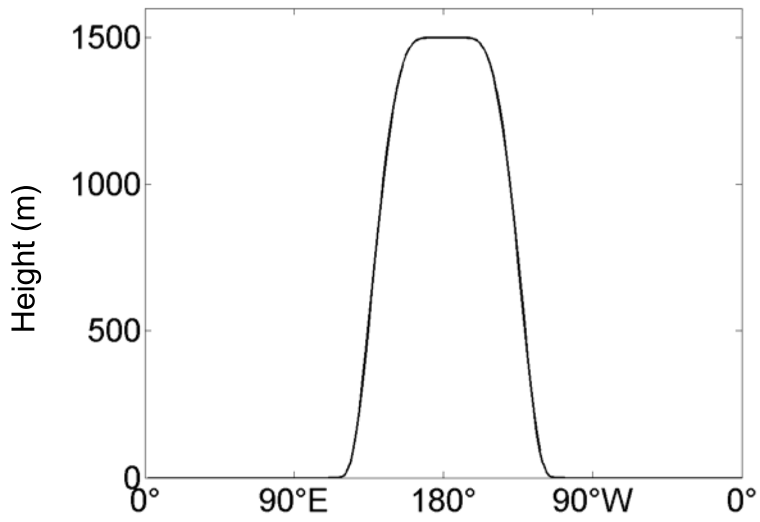


圖 5.1　理想地形實驗所植入的地形，六個實驗的峰頂值皆為 1500 公尺。實驗 B 所植入的圓形地形半徑為 4000 公里，其尺度與波數 5 的波長相近；實驗 C 橫軸 2500 公里，縱軸 8000 公里；實驗 D 為實驗 C 的地形橫放；實驗 E 為實驗 C 的地形以中心點為圓心，右轉 45°；實驗 F 為左轉 45°。

(a)



(b)

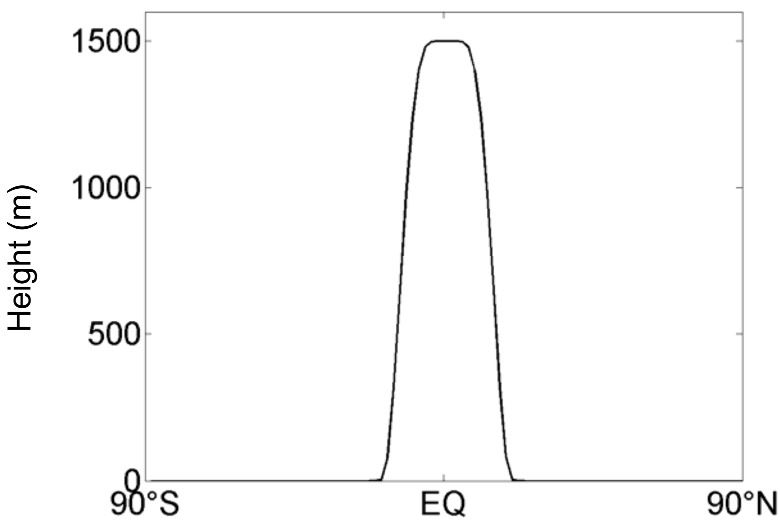


圖 5.2　植入緯向地形（實驗 D）之剖面圖，(a) 為東西方向剖面，(b) 為南北方向剖面。

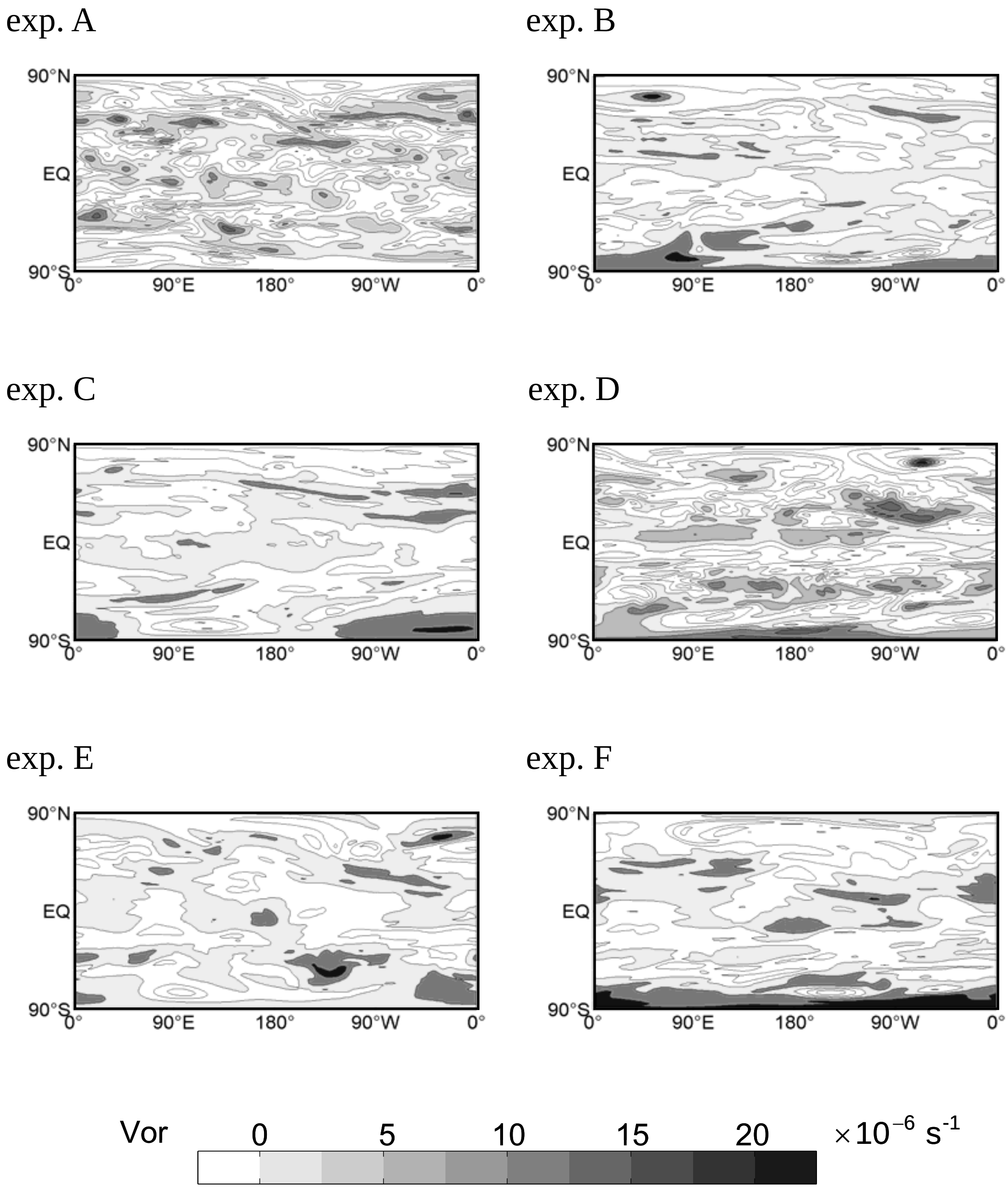


圖 5.3　理想地形實驗積分 90 天後的物理空間渦度場。在沒有植入地形的實驗 A 中所形成的系統尺度較小；在植入橫向地形的實驗 D 中，所產生出的緯向渦度結構較紮實，強度亦較強。

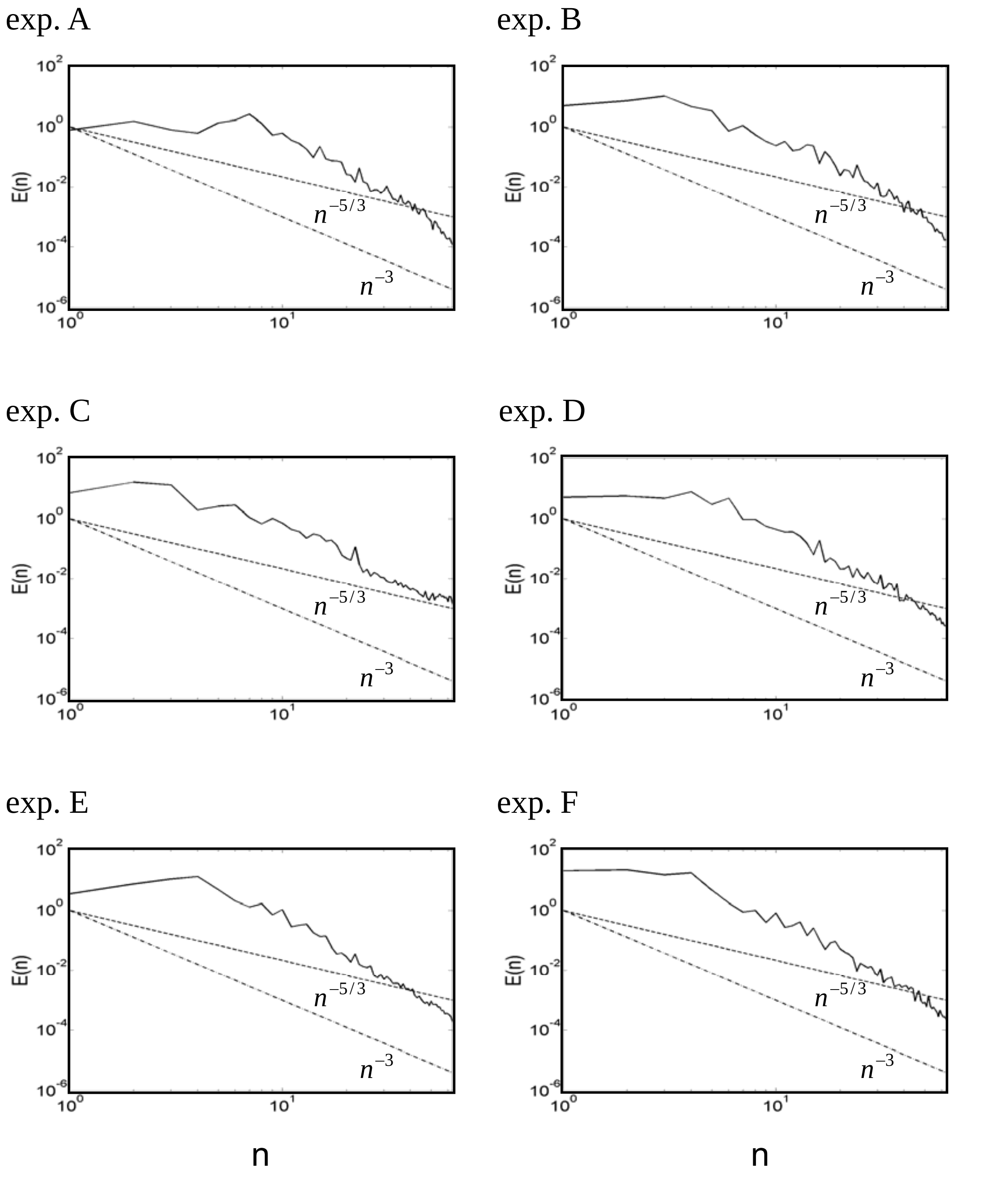


圖 5.4　理想地形實驗積分 90 天後的一維雙對數座標能量波譜分析結果。橫軸為總波數，縱軸為動能波譜，$n^{-5/3}$與n^{-3}之直線亦繪出以利比較。顯示實驗 B、C 及 D 出現了$-5/3$的斜率；實驗 A、E 及 F 則無。

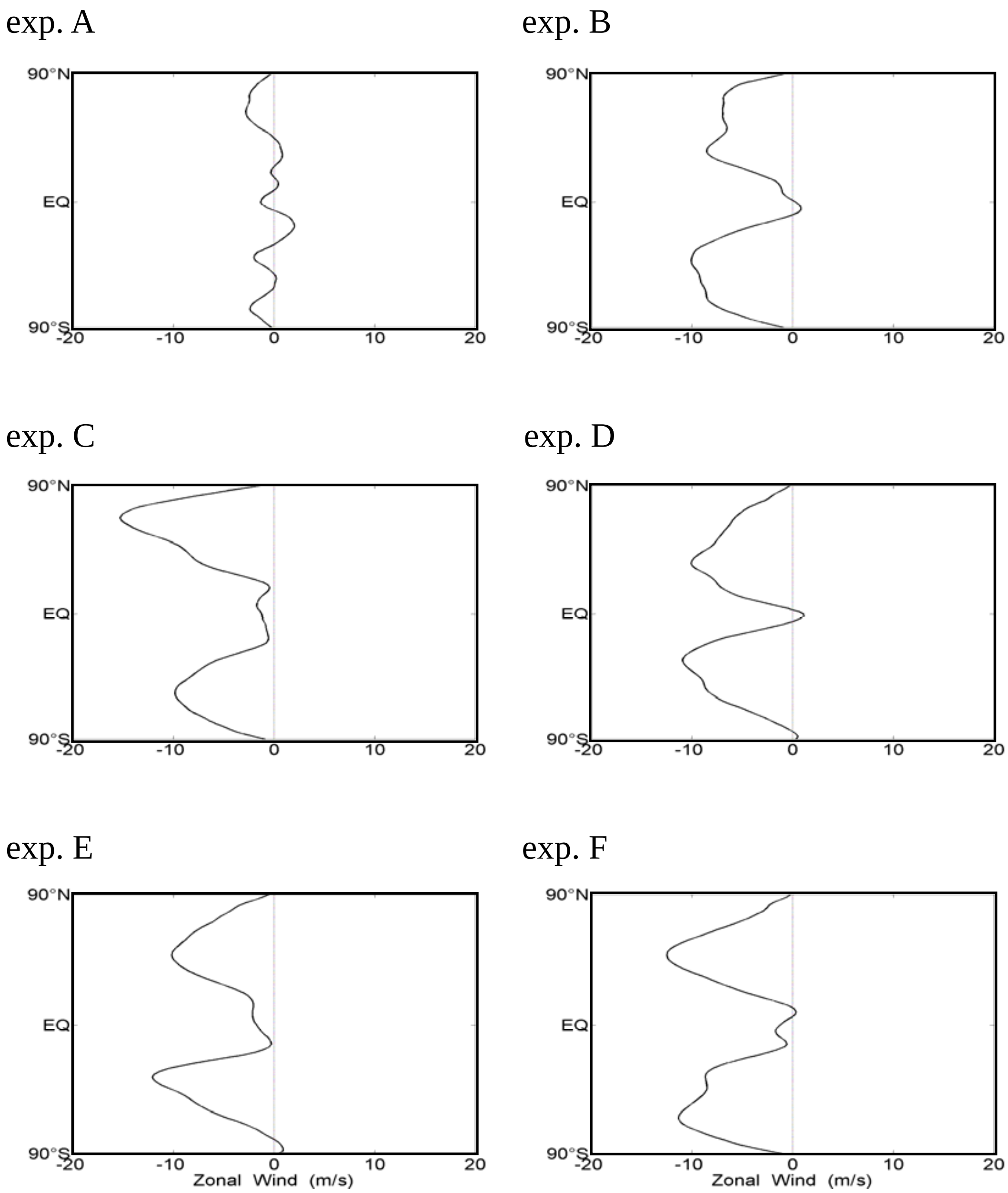
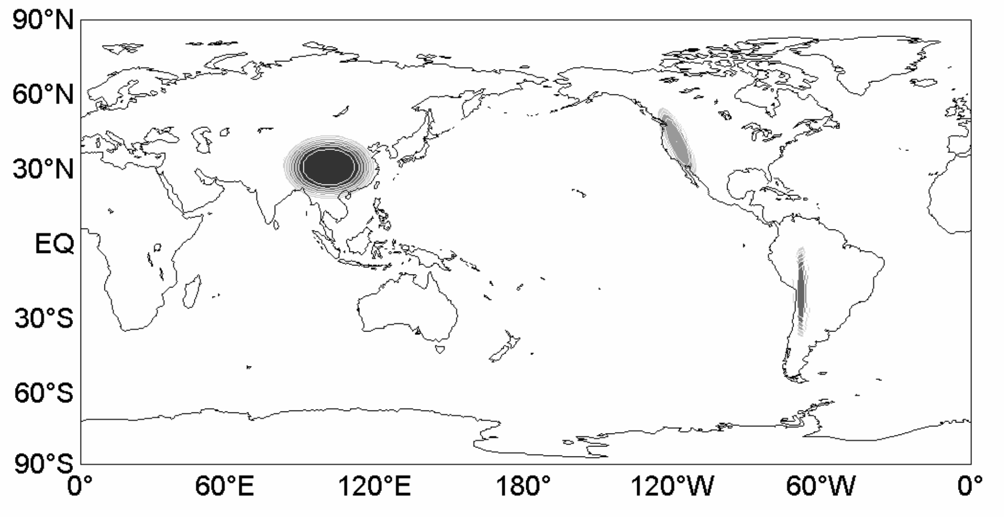


圖 5.5　理想地形實驗積分 90 天後，緯向平均緯向風取 90 天時間平均的實驗結果。顯示在植入地形的附近有明顯之西風分量，其尺度與地形的尺度相近。

(a)



(b)

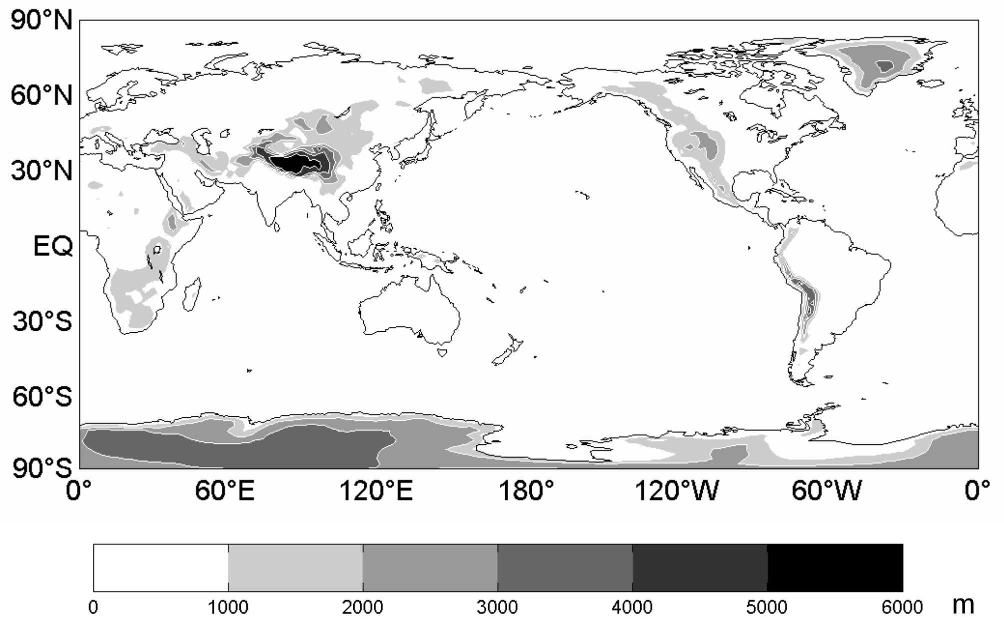


圖 5.6　（a）依照全球主要地形位置分佈植入理想地形（實驗 G）之地形高度分佈圖。最大地形高度分別為青康藏高原 5000 公尺、北美洲落磯山脈 3000 公尺、南美洲安地斯山脈 4000 公尺。（b）植入全球真實地形（實驗 H）之地形高度分佈圖，最大地形高度為 5526 公尺。

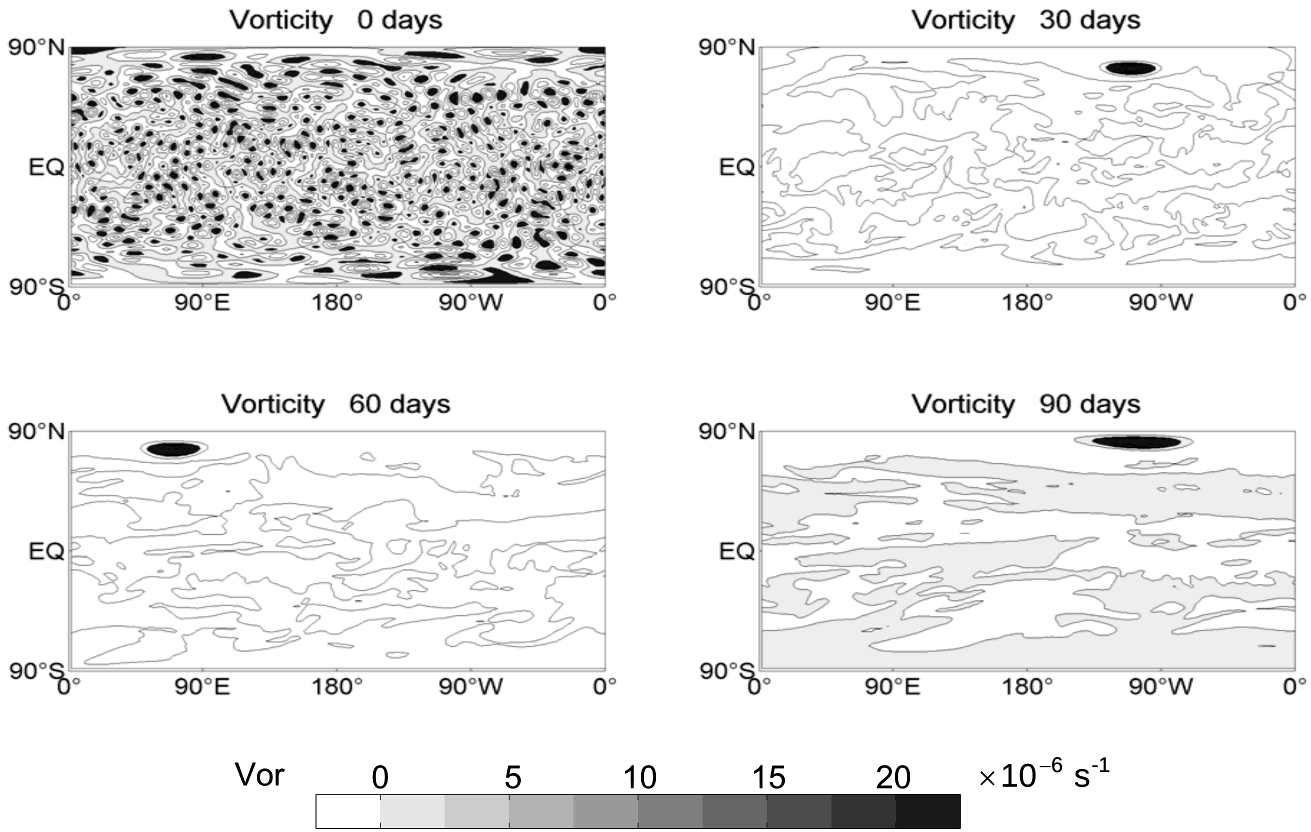


圖 5.7　依照全球主要地形分佈植入理想地形（實驗 G）之物理空間渦度場隨時間的變化，陰影區域為正渦度區域，顏色愈深表示渦度愈強。由於有衰減項，渦度帶的強度隨時間遞減。

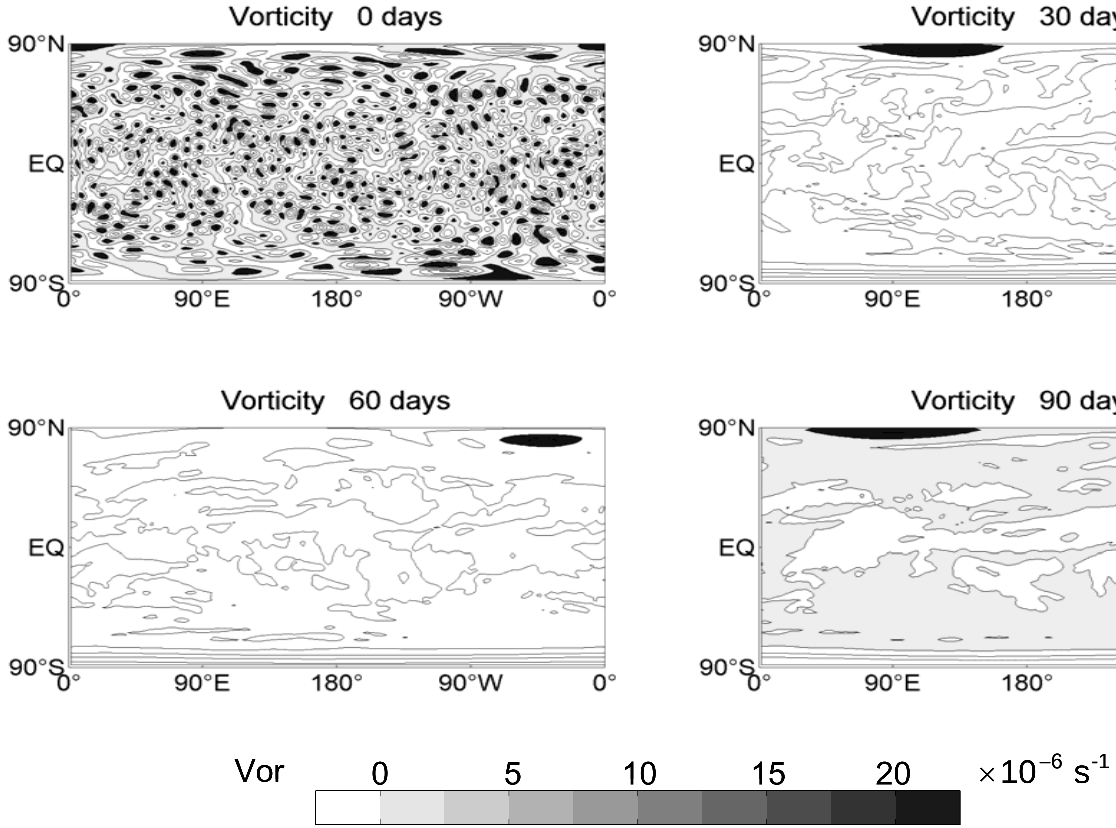
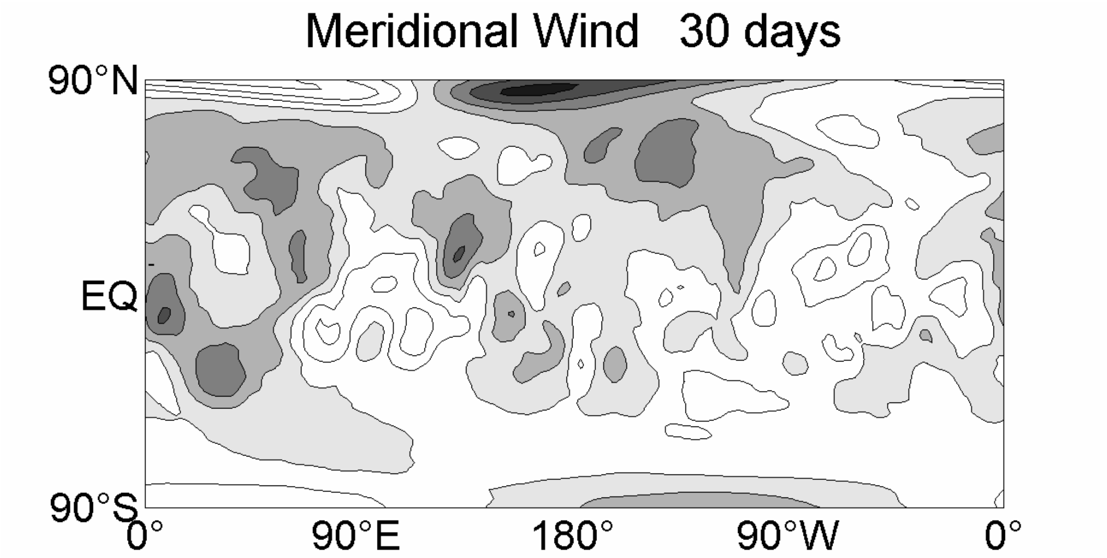


圖 5.8　植入全球真實地形（實驗 H）之物理空間渦度場隨時間的變化，陰影區域為正渦度區域，顏色愈深表示渦度愈強。由於有衰減項，渦度帶的強度隨時間遞減，同時顯示許多中小尺度的渦度擾動。

(a)



(b)

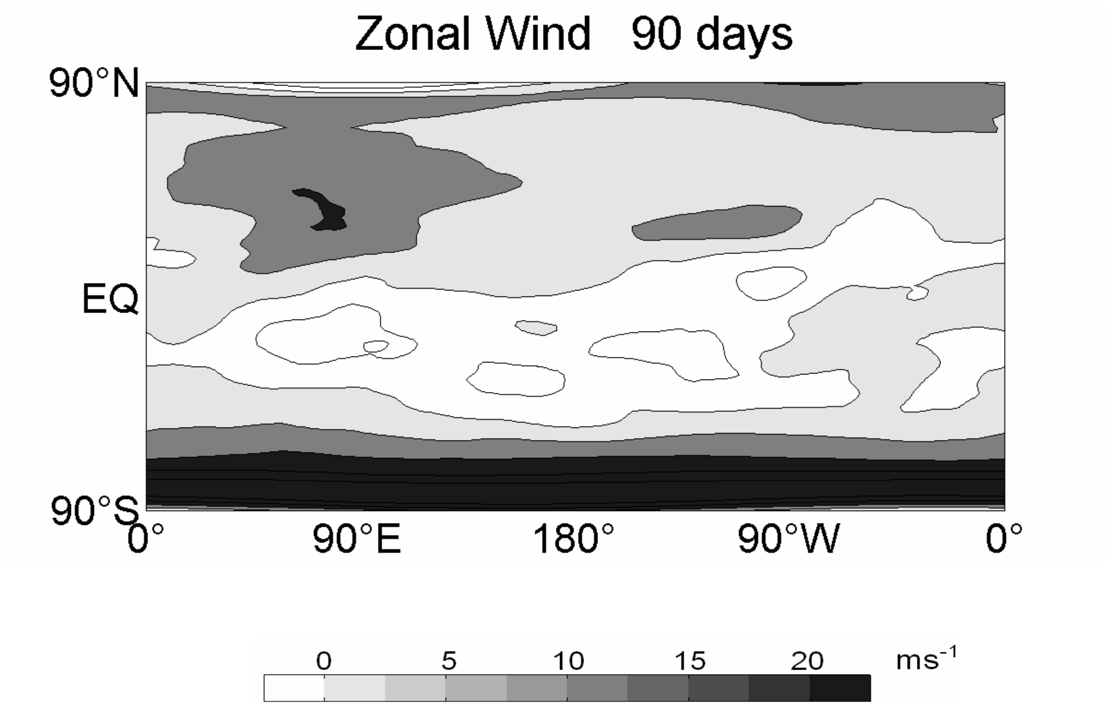


圖 5.9　植入全球真實地形（實驗 H）之（a）模式積分 30 天，物理空間經向風場之分佈；(b）模式積分 90 天，物理空間緯向風場之分佈。詳細說明請見本文。

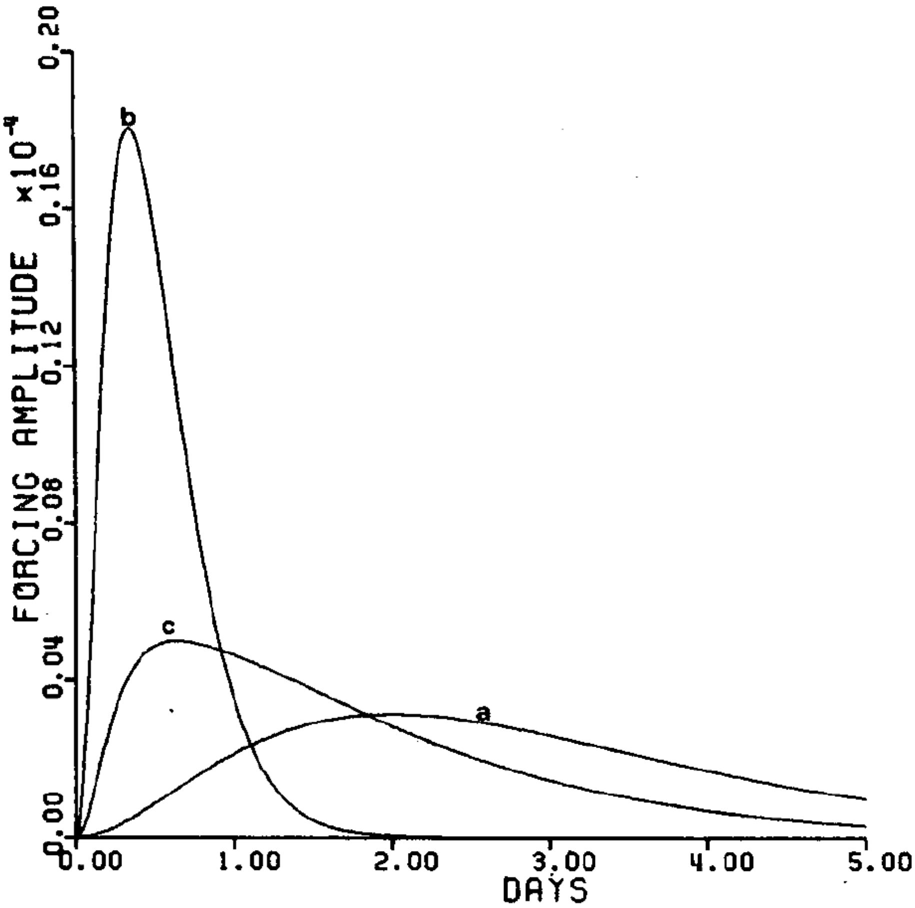


圖 6.1　強迫函數之強迫振幅隨時間的變化。曲線 a 是緩慢強迫函數，$\tau = 1\,\text{day}$；曲線 b 是快速強迫函數，$\tau = 15 \times 10^3\,\text{s}$；曲線 c 是接近真實的強迫函數。三條曲線以下的面積皆標準化為相等。（摘自 Lim and Chang, 1981）

附　錄

符號表：

本表之排列規則，依照英文字母與希臘字母之順序排列。相同字母帶有上標或下標者，列於字母之後；大寫字母列於小寫字母之後；大寫字母帶有上標或下標者，列於大寫字母之後；最後為數學運算符號。

a	地球半徑，6370 km
a_0	高斯渦旋之長軸半徑
a_{nm}	多極係數（multipole coefficients）
$\hat{A}$	強迫振幅（forcing amplitude）
A_k	高斯求積法的係數
b	DC 渦旋之形狀參數
b_0	高斯渦旋之短軸半徑
C, C'	常數
D	輻散項
E	動能（kinetic energy）
$E(n)$	動能波譜（kinetic energy spectrum）
f	$2\Omega\sin\phi$，科氏參數
f_0	常數之科氏參數
F_i, F_{i+1}	現在時步與下一個時步的強迫值

g	重力加速度，$9.8\,\mathrm{ms}^{-2}$
h	水深
$h_{\max}$	最大地形高度
h_T	地形高度
H	平均水深
$J(\cdot,\cdot)$	亞可比算子（Jacobian operator）
k_β^R	β plane 上波數型式的萊茵斯尺度（Rhines scale）
K^2	$K^2 \equiv m^2 + l^2$，水平波數的平方和
l	經向波數（meridional wave number）；系統尺度（第 5 頁）
L	系統平移之距離
m	緯向波數（zonal wave number）
n	總波數（total wave number）
n_1	初始動能最大值所在之總波數
N	網格點數
P	Palinstrophy
P_n^m	連帶勒壤得多項式（associated Legendre polynomials）
P^*	位渦擾動

r	半徑
r_a	介於0到1之間的亂數
r_j	無因次化之徑向距離
r_m	最大風速所在半徑
R	$R \equiv (1-\Delta t/2\tau_F)/(1+\Delta t/2\tau_F)$
R_β	β羅士比數（β Rossby number）
t	時間（time）
$T64$	三角形截斷於第 64 個波
T_A	系統平移之時間尺度
T_R	羅士比波時間尺度
u	緯向風速
$\overline{u}$	平均緯向風
$\vec{u}$	速度場
U	緯向餘弦權重速度
v	經向風速
$\hat{v}$	$\hat{v} = \overline{hv}/\overline{h}$，為質量權重緯向平均經向風
v^*	經向擾動風場
V	經向餘弦權重速度
V_m	最大風速
V_{rms}	均方根（root mean square）速率

$V(r)$	徑向速度場分佈
$w(x)$	權重函數
x_0	高斯渦旋中心位置之 x 座標
x_k	高斯網格點（Gauss grid points）
y_0	高斯渦旋中心位置之 y 座標； 緯向帶狀寬度（第 25 頁）
Y_n^m	球面諧函數（spherical harmonics function）
Z	渦度擬能（enstrophy）
β	df/dy，行星渦度梯度
Δp	壓力擾動
Δt	時步（time step）
$\Delta\bar{u}$	第 1 天與第 15 天 $\bar{u}$ 的差值
ε	單位質量動能的串跌率
ϕ	緯度（latitude）
Φ	重力位高度場（geopotential height）
$\overline{\Phi}$	平均重力位高度場
Φ'	擾動重力位高度場
γ	高階擴散係數 （higher-order diffusion coefficient）
η	單位質量渦度擬能的串跌率

κ	追蹤參數之分子擴散率
λ	經度（longitude）
μ	$\mu \equiv \sin\phi$
ν	黏滯係數（viscosity coefficient）
Θ	追蹤參數（tracer）
σ	無因次化成長率
σ_n^m	波數型式之亂流頻率
τ	強迫函數之時間常數
τ_F	強迫無相關時間 （forcing decorrelation time）
ω	地球自轉角速度
ω_n^m	波數型式之羅郝波（Rossby-Haurwitz wave）頻率
$\hat{\Omega}$	立體角（solid angle）
ψ	流函數（streamfunction）
ζ	渦度（vorticity）
ζ'	擾動渦度場
$\zeta_{\max}$	高斯渦旋渦度最大值
$\zeta(r)$	徑向渦度場分佈
∇^2	拉卜拉士運算子（Laplacian operator）
$-$	緯向平均