國立台灣大學理學院大氣科學研究所

碩士論文

Department of Atmospheric Sciences

College of Science

National Taiwan University

Master Thesis

西方邊界流模擬—切比雪夫配置法與沉浸邊界法整合

Western Boundary Current Intensification Modeling with Chebyshev and Immerse Boundary Methods

張光宇

Kuang-Yu Chang

指導教授：郭鴻基 博士，曾于恆 博士

Advisor: Hung-Chi Kuo, Ph.D., Yu-Heng Tseng, Ph.D.

中華民國 99 年 7 月

July, 2010

國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

本論文係 張光宇 君（學號 R97229023 ）在國立臺灣大學大氣科學學系、所完成之碩士學位論文，於民國 99 年 7 月 7 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

郭鴻基 曾于恆 （簽名）

（指導教授）

李清勝 楊明仁

系主任、所長 吳俊傑 （簽名）

謝辭

本論文的完成首先需要感謝的是郭鴻基教授與曾于恆教授兩位指導老師對我一路以來的細心指導與栽培; 大二時曾于恆老師教導我撰寫程式與數值方法, 大三時郭鴻基老師更引領我進入計算科學的領域, 令我首次得以將所學應用於實務中。正式踏入研究領域後能與兩位指導老師合作, 從無到有的撰寫數值模式以至於本論文的產生實爲學生的榮幸; 紮實的訓練過程雖然艱辛但也令我收穫良多。謝謝過去曾共同討論本論文的老師與同學們, 更感謝口試委員李清勝老師、簡芳菁老師, 以及楊明仁老師對於本論文的諸多建議; 本論文因你們的指正而更爲完善。謝謝動力與模擬研究室的助理美雲平日的照顧, 謝謝珮雯學姐、理寰學長、禹明學長、憶婷學姐、宇晨、牧豪、富傑、家瑋和力瑋的共同打拼與砥礪, 研究中能與大家互相討論眞是我的福氣。謝謝台大大氣系的學長姐、學弟妹與同學們, 特別是吃飯組的阿良、瑋哥、夏子與立平, 以及娛樂組的詩詩與暴哥; 和大家相處的日子眞的很開心。謝謝涵涵一直以來的支持與鼓勵, 謝謝家人對我的肯定與關懷; 正因爲有你們的包容與陪伴才成就了今日的我。

張光宇 Kuang-Yu Chang

2010.07.27 于動力與模擬研究室

摘 要

本研究以物理海洋中經典的西方邊界流 (Western boundary current) 爲例, 首次嘗試整合切比雪夫配置法與虛網格沉浸邊界法。西方邊界流現象是由於海洋中的波動能量在海洋西邊界不斷地累積而產生, 在狹窄的西方邊界流區域內有著整個海洋中的最大流速, 藉以維持海洋流體運動的質量與絕對渦度守恆。雖然西方邊界流生成理論於過去已有相當好的理解, 但在數值模擬中, 海洋的複雜邊界會大幅提高模擬困難度, 本研究希望能夠擷取具有指數收斂與快速轉換等性質的切比雪夫配置法 (Chebyshev collocation method) 以及在模式中能藉由邊界強迫機制有效處理複雜邊界問題的虛網格沉浸邊界法 (Ghost cell immersed boundary method) 兩者之優點, 建立出一套同時具有高精確度以及高效率的計算方法。

研究中利用海洋渦度方程式設計一系列正壓模式進行模擬, 模擬結果顯示切比雪夫配置法以及虛網格沉浸邊界法的使用皆可有效地掌握西方邊界流運動, 且數值穩定解具有一致性。由行星渦度梯度產生的羅士比波 (Rossby wave) 將於海洋西方邊界造成能量累積, 爲瞬態 (Transient state) 西方邊界流生成的物理機制, 在近似對稱的海洋中造成高度不對稱性; 而非線性動力則扮演將波動能量重新分佈的角色, 有效地將能量由平均流向西處往向東處傳遞。除單一定義域的模擬外, 我們更藉由分解模式定義域的方式整合各種數值方法, 研究結果顯示子定義域合併處之網格點配置對耦合模式有顯著的影響; 合併處網格點完全重疊時, 子定義域間可透過分解定義域的方式相互提供邊界條件, 藉以成功地整合切比雪夫配置法與虛網格沉

浸邊界法。然而, 合併處網格點不完全重疊時, 子定義域間邊界條件之交換須仰賴數值內差的使用; 雖可於各子定義域中有效地提供邊界條件, 但將受限於子定義域間網格點解析度之差異導致合併處質量通量不連續, 於耦合定義域產生數值上的不連續, 進而影響積分預報的穩定性。研究結果顯示, 耦合模式之二階中差分法搭配切虛網格沉浸邊界法子定義域與比雪夫配置法子定義域間大小比值須爲六分之一以上方可有效運作, 兩者間相互給定邊界條件時所使用的內差方法精確度亦將對積分穩定性造成影響; 且藉由控制子定義域間質量通量量值與數值方法間精確度達一致將可抑制數值不穩定產生, 有效延長耦合模式穩定預報時間。

關鍵詞: 西方邊界流、切比雪夫配置法、沉浸邊界法、分解定義域

ABSTRACT

By simulating the famouse Western Boundary Current (WBC), this thesis first integrate Chebyshev collocation method with Ghost Cell Immersed Boundary Method (GCIBM) into a powerful coupled model. WBC intensification is caused by wave energy accumulation at the western boundary of the ocean basins, causing a narrow region which has higher meridional velocity than anywhere else. Complex boundary geometry may also strongly affect the WBC which is difficult to handle in the numerical model. In order to solve this problem and increase flexibility, we use GCIBM to implicitly provide the boundary conditions for the numerical model. GCIBM is an advanced numerical method, based on the use of artificial forcing to represent the effect of the realistic boundaries on the flow. To accurately resolve the wave dynamic, we employee the Chebyshev Collocation method with exponential solution convergence rate. Combing GCIBM with Chebyshev Collocation method, we present high accuracy and flexibility barotropic model of different complexity to simulate the WBC intensification in the β plane ocean.

The numerical results show that both Chebyshev Collocation method and central difference with GCIBM can provide a reasonable WBC. The width of the WBC agrees well with the theoretical one. It seems that during the transient state Rossby waves play an important role in the generation of WBC, causing the asymmetric

property in the nearly symmetric ocean, while the nonlinear dynamics would redistribute the wave energy of the ocean. Besides single domain modeling, we use domain decomposition to integrate Chebyshev collocation method with GCIBM. The resluts sugesst that the arrangments of grids at the embedding regions are essential to the coupled model; Chebyshev collocation method and GCIBM would work efficeintly through domain decomposition with the embedding grids matching exactly between the subdomains. However, as long as the embedding grids don't match each other; interpolation schemes are used in the two-way embedding algorithms, which would cause the mass flux inconsistency between the subdomains due to the difference grid resolutions. This numerical inconsistency would lead to error accumulation at the embedding regions, restricting the effective prediction time steps in the coupled models. Our research suggest that size ratio between GCIBM and Chebyshev collocation method subdomains should be larger than one-sixth for the couplde model to run effectively; furthermore, we notice that both mass flux tuning and solution cnovergence rate matching between the subdomains could enlonggate the effective prediction time steps in the coupled models.

Key words: Western boundary current, Chebyshev collocation method, Immersed boundary method, Domain decomposition.

目錄

1 前言 **1**

1.1 研究背景 1

1.2 研究動機與目的 3

2 研究方法 **4**

2.1 西方邊界流理論 4

2.2 切比雪夫配置法 9

2.2.1 有限定義域之波譜方法 9

2.2.2 切比雪夫多項式 11

2.3 沉浸邊界法 13

2.3.1 沉浸邊界法理論 13

2.3.2 虛網格沉浸邊界法 15

3 模式設計 **18**

3.1 控制方程 18

3.2 一維非線性史托梅爾模式 19

3.2.1 控制方程 19

3.2.2 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件 22

3.2.3 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法 22

3.2.4 切比雪夫配置法搭配虛網格沉浸邊界法 24

3.3 二維正壓線性輻散模式 25

3.3.1 二維線性淺水方程 25

3.3.2 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件 26

3.3.3 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法 27

3.3.4 切比雪夫配置法搭配虛網格沉浸邊界法 33

3.4 二維正壓非線性輻散模式 37

3.4.1 二維非線性淺水方程 37

3.4.2 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件 38

3.4.3 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法 39

3.4.4 切比雪夫配置法搭配虛網格沉浸邊界法 40

4 實驗結果 **42**

4.1 一維非線性史托梅爾模式 42

4.2 二維線性正壓輻散模式 44

4.3 二維非線性正壓輻散模式 47

5 總結 **50**

5.1 結論 50

5.2 未來展望 53

圖錄

1 Nansen的定性理論示意圖。圖 (a) 顯示表層受到風應力 (F_t) 驅動的立方塊開始運動後將受到科氏力 (F_c) 以及底部摩擦力 (F_b) 的影響。圖 (b) 爲穩態時俯視圖, 顯示三力平衡以及立方塊運動方向。(摘自 Pond and Pickard, 1983) 58

2 艾克曼螺旋示意圖。可發現洋流速度在洋面最快, 並向下成螺旋形遞減, 淨值量向右傳送(北半球)。(摘自Garrison, 1993) 59

3 衛星觀測的海洋經向速度場, 綠色爲速度正值(向北), 紅色爲速度負值(向南), 色階越深表示量值越大; 故可發現海洋中僅西方邊界流存在, 其速度量值遠較其餘海洋速度爲大, 快速的向北傳送, 以維持洋流的質量守恆。(摘自Vallis, 2006) 60

4 羅士比波頻散關係, 橫軸爲東西向與南北向波數比值, 縱軸爲無因次化的羅士比波頻率; 故可看出長波群速度向西傳遞, 短波群速度則相對較慢的向東傳遞。. 61

5 虛網格點示意圖, 色階處爲模式邊界, 叉號爲模式網格點; 若網格點位於邊界以外則爲物理網格點, 如(a)、(c) 所示, 若網格點於邊界內則爲虛網格, 如 (b)、(c) 所示。(摘自 Tseng et al., 2003) 62

6 虛網格格點配置示意圖,G爲虛網格點所在,X_1與X_2爲鄰近邊界之流體網格點,O 爲模式邊界,I 爲虛網格點與邊界之對稱點。(摘自 Tseng et al., 2003) 63

7 虛網格沉浸邊界法之收斂速度, 橫軸爲網格點間距, 縱軸爲最大誤差值, 虛線與實線分別爲線性內差以及二階內差應用於虛網格函數值之結果。上圖爲模式邊界之收斂速度, 下圖爲模式整體之收斂速度, 可發現二階內差的使用在邊界上較線性內差精確, 但對模式整體之收斂速度並無提升。(摘自Tseng et al., 2003) 64

8 一維耦合模式網格配置示意圖, 上方綠色網格爲切比雪夫配置點, 下方藍色網格爲利用配置點間最小間距爲網格間距之中差分法網格點, 兩者重合兩個網格點以彼此提供邊界條件; 中差分法定義域右邊界爲不等間距網格點, 以虛網格沉浸邊界法給定邊界條件。. 65

9 模式海表風應力量值之南北變化, 橫軸爲風應力量值, 縱軸爲模式南北向網格點座標, 藍線爲利用餘弦函數擬合之風應力量值, 綠色虛線處風應力量值爲零。故模式風應力僅與緯度變化有關, 低緯東風 (風應力爲負值) 中緯西風 (風應力爲正值) 。. 66

10 模式無因次動能之時間數列, 橫軸爲模式積分時間, 縱軸爲模式無因次動能; 在此利用時間數列中動能最大值爲基準, 將各時間動能標準化以得到無因次動能。可發現模式約積分15日後無因次動能趨近定值, 到達穩定態。. 67

11 Arakawa A-grid 示意圖, 以行表示東西向, 列表示南北向設計模式網格點; 並於矩陣各元素上進行u、v與ϕ的預報。. 68

12 模式網格點配置示意圖; 藉由分解定義域的方式將單一定義域分解爲左右兩子定義域分別進行計算, 並設定兩子定義域間於東西向交錯兩個網格點使其相互給定邊界條件, 如紅色箭頭所示。. 69

13 模式分解定義域示意圖; 模式兩側以二階中差分法搭配沉浸邊界法計算, 處理海洋邊界條件, 模式中央則以切比雪夫配置法搭配開放式邊界條件求解, 與兩側子定義域交錯一個網格點, 以彼此提供邊界條件。. 70

14 模式網格配置示意圖; 藍色網格爲二階中差分法網格點, 綠色網格爲切比雪夫配置法網格點, 子定義域間於東西向交錯兩個網格點以彼此提供邊界條件, 如紅色箭頭所示。. 71

15 一維非線性史托梅爾模式敏感度測試, 橫軸爲模式無因次寬度, 縱軸爲無因次流函數; 故可發現參數ε控制模式中西方邊界流寬度,ε越大時西方邊界流無因次寬度越大, 量值越小。 72

16 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件 (CC) 與二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法 (FD) 於一維線性史托梅爾模式穩定解比較, 橫軸爲模式無因次寬度, 縱軸爲無因次流函數; 可發現兩種數值方法模擬結果具一致性。 73

17 切比雪夫配置法 (CC) 搭配固體邊界條件 (Wall) 與二階中差分法 (FD) 搭配虛網格沉浸邊界法 (GC) 收斂速度比較圖, 橫軸爲模式計算網格點數, 縱軸爲方均根誤差; 可發現切比雪夫配置法具指數收斂之特性, 收斂速度遠快於二階中差分法的使用。 74

18 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法 (GC) 與固體邊界條件 (Wall) 收斂速度比較圖, 橫軸與縱軸爲皆爲對數座標, 分別表示模式網格點間距與方均根誤差; 可發現對稱虛網格點的使用精確度雖較固體邊界條件差, 但仍保有二階收斂速度, 非對稱虛網格點的使用則於精確度與收斂速度的表現皆較差, 顯示複雜邊界下須使用高階內差方法給定虛網格點函數值。 75

19 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件於不同平均流 (U_i) 下數值穩定解比較圖, 橫軸爲模式無因次寬度, 縱軸爲無因次流函數; 故可發現平均流向東時西方邊界流寬度將減小且強度加強, 平均流向西則反之。 76

20 分解定義域應用於切比雪夫配置法 (CC) 與二階中差分法搭配沉浸邊界法 (FD) 之數值穩定解, 橫軸爲模式無因次寬度, 縱軸爲無因次流函數; 模擬結果顯示分解定義域前後穩定解具一致性, 故兩種數值方法可藉由分解定義域的使用穩定運行。 77

21 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件所模擬之東西向速度場, 單位爲 ($\frac{m}{s}$) , 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現東西向速度場呈現南北反對稱的形式, 北邊爲正 (向東) 南邊爲負 (向西) 。 78

22 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件所模擬之南北向速度場, 左圖爲海洋整體, 右圖爲西方邊界流區域, 單位皆爲 ($\frac{m}{s}$) , 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現海洋中僅於靠近西邊界處有顯著地向北運動, 且其速度量值遠大於海洋其餘各處之向南運動。 79

23 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件所模擬之重力位高度場, 單位爲 ($\frac{m}{s}$)^2 , 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現重力位高度呈現西高東低且南北對稱的分佈情形。 80

24 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之東西向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現東西向速度場呈現南北反對稱的形式, 北邊爲正 (向東) 南邊爲負 (向西) 。 81

25 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之南北向速度場, 左圖爲海洋整體, 右圖爲西方邊界流區域, 單位皆爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現海洋中僅於靠近西邊界處有顯著地向北運動, 且其速度量值遠大於海洋其餘各處之向南運動。 82

26 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之重力位高度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})^2$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現重力位高度呈現西高東低且南北對稱的分佈情形。 83

27 分解定義域藉由二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之東西向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現東西向速度場呈現南北反對稱的形式, 北邊爲正 (向東) 南邊爲負 (向西) 。 84

28 分解定義域藉由二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之南北向速度場, 擷取西方邊界流區域, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現海洋中向北運動極大值於位於西方邊界, 且以半縱軸爲對稱軸南北對稱。 85

29 分解定義域藉由二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之重力位高度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})^2$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現重力位高度呈現西高東低且南北對稱的分佈情形。 86

30 粗細網格點解析度差異造成子定義域合併處邊界質量通量不連續示意圖, 網格點完全重疊時可直接給定函數值, 以實心箭號表示, 不完全重疊時須藉由數值內差給定函數值, 以空心箭號表示; 可發現粗細解析度下計算之質量通量量值必定有誤差存在, 固有質量通量不連續產生。 87

31 二維線性耦合模式所模擬之東西向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現東西向速度場呈現南北反對稱的形式, 北邊爲正 (向東) 南邊爲負 (向西) 。 88

32 二維線性耦合模式所模擬之南北向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現南北向速度場以半縱軸爲對稱軸南北對稱, 且西方邊界處有向北運動極大值, 量值較其餘海洋區域爲大。 89

33 二維線性耦合模式所模擬之重力位高度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})^2$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現重力位高度呈現西高東低的分佈情形。 90

34 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件所模擬之東西向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現線性結果之對稱性已不復存, 東西向速度場僅於西北邊界有極大值。 91

35 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件所模擬之南北向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 雖同樣具有顯著西方邊界流現象, 但向北運動極大值向北方偏移, 不具線性結果之對稱性。 92

36 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件所模擬之重力位高度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})^2$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現重力位高度場仍以西高東低質量聚集於西方邊界的情形分佈, 但極大值亦有向北偏移的現象產生。 93

37 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之東西向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現線性結果之對稱性已不復存, 東西向速度場僅於西北邊界有極大值。 94

38 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之南北向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 雖同樣具有顯著西方邊界流現象, 但向北運動極大值向北方偏移, 不具線性結果之對稱性。 95

39 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之重力位高度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})^2$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現重力位高度場仍以西高東低質量聚集於西方邊界的情形分佈, 但極大值亦有向北偏移的現象產生。 96

40 分解定義域藉由二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之東西向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現模擬結果與單一定義域的使用相同, 東西向速度僅於西北邊界處有極大值存在。 97

41 分解定義域藉由二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之南北向速度場, 擷取西方邊界流區域, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現模擬結果與單一定義域的使用相同, 西方邊界流極大值向北偏移。 98

42 分解定義域藉由二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之重力位高度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})^2$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現模擬結果與單一定義域的使用相同, 重力位高度呈現西高東低質量聚集於西方邊界的情形分佈, 且極大值向北偏移。 99

43 二維非線性耦合模式所模擬之東西向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現東西向速度場呈現南北反對稱的形式, 北邊爲正 (向東) 南邊爲負 (向西) 。. . . 100

44 二維非線性耦合模式所模擬之南北向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現西方邊界處有向北運動極大值, 東方邊界具向南運動極大值, 且運動速度量值較西方邊界爲小。 101

45 二維非線性耦合模式所模擬之重力位高度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})^2$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現重力位高度呈現西高東低的分佈情形。. 102

46 不規則邊界西方邊界流模式定義域示意圖; 於原模式西北邊界定義域處增加一地形邊界進行模擬, 並利用虛網格沉浸邊界法 (虛線) 給定模式邊界條件。. 103

47 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之東西向速度場 (西北邊界尺度875*875公里) , 單位爲 ($\frac{m}{s}$) , 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現東西向速度場僅於模式原北方邊界與新增之北方邊界有極值存在 。. 104

48 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之南北向速度場 (西北邊界尺度875*875公里) , 單位爲 ($\frac{m}{s}$) , 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現南北向速度場於原西方邊界處與新增之西方邊界處有極值存在。. 105

49 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之重力位高度場 (西北邊界尺度875*875公里) , 單位爲$(\frac{m}{s})^2$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現海洋重力位高度有向西方邊界延伸之趨勢。. 106

50 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之東西向速度場 (西北邊界尺度500*2500公里) , 單位爲 ($\frac{m}{s}$) , 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現東西向速度場僅於模式原北方邊界與新增之北方邊界有極值存在 。. 107

51 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之南北向速度場 (西北邊界尺度500*2500公里) , 單位爲 ($\frac{m}{s}$) , 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現南北向速度場於原西方邊界處與新增之西方邊界處有極值存在。 108

52 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之重力位高度場 (西北邊界尺度500*2500公里) , 單位爲 ($\frac{m}{s}$)^2 , 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現海洋重力位高度有向西方邊界延伸之趨勢。. 109

53 不規則邊界對於西方邊界流運動之影響, 等值線爲無因次流函數場, 左右兩圖分別爲線性與非線性模式之模擬結果; 可發現增加地形複雜度時, 西方邊界流將沿新增之地形邊界運動。(摘自Bryan, 1963) . 110

第 1 章

前言

1.1 研究背景

計算機與數值方法的發展活化了過去科學家的抽象闡述, 使得自然界中複雜的控制方程可藉由數值模擬具體地呈現在世人眼前, 並讓大氣科學家得以進行預報工作。受惠於計算資源的提升以及氣象衛星的使用, 大氣模式的預報準確度已有明顯的進步; 但自然界中的天氣現象並非僅由大氣場所決定, 必須建立在地球系統的觀點下進行分析與研究, 因此, 我們需要整合氣圈、水圈、陸圈與生物圈等資訊進行統合模擬才能完整地闡述天氣現象。

在此我們將就大氣場以及海洋場的整合進行討論, 海氣交互作用以及海洋暖水區對於颱風強度的影響等議題皆是近年來非常熱門的研究領域, 處理這類問題除須立基在良好的大氣模式外更需要對於海洋有詳盡的模擬; 由於海洋流體與大氣流體皆屬於地物流力的範疇, 故兩者間有著非常類似的控制方程, 但控制方程相似的形式中卻隱含了一個決定性的差異: 自由大氣於東西向無邊界存在, 但海洋卻有顯著

的大陸地形邊界存在, 故當我們欲建立一套有效率且精確的海氣耦合模式時, 首先需要克服的即爲複雜大陸邊界對於海洋模式邊界條件給定的挑戰。一般在模式中常利用梯級法 (Stair-step) 與部分網格法 (Partial-cell) 等方法處理不規則邊界上的邊界條件, 這類方法共同的特色是改變模式中鄰近邊界處的網格點配置, 利用階梯狀的網格點設計來配合複雜邊界的幾何形狀, 再藉由邊界上的網格點直接給定邊界條件, 故當模式在邊界的解析度較高時有較好的表現; 即便如此, 由於空間解析度受限於積分時步 (CFL condition) 的關係, 這類方法在有限的計算資源下必定有其極限。Tseng et al. (2003) 中使用了虛網格沉浸邊界法 (Ghost cell immersed boundary method) 給定複雜邊界的邊界條件, 這類方法不須強迫網格點位於邊界上, 與以往對於邊界的認知並不相同, 邊界的存在於此類方法中僅視爲影響流體運動的網格點而非終點, 並藉由人造力 (Artificial forcing) 量值度量邊界對於流體運動的影響, 透過各網格點間人造力的分配即可間接給定邊界條件, 故可對複雜的邊界問題做有效的處理; 因此, 我們希望能利用沉浸邊界法提供海洋模式中所需的邊界條件, 有效處理複雜邊界對於海洋模式的影響。複雜邊界的存在除對模式邊界條件的準確給定造成挑戰外, 更將於模式中激發出許多波動, 有效且精確的處理這些波動現象即爲設計海洋模式的另一個重點; Fulton et al. (1987) 提出了適用於有限區域模式的切比雪夫波譜方法, 由於切比雪夫配置法 (Chebyshev collocation method) 之收斂速度不爲週期邊界條件所限制, 這類方法除保有波譜方法的指數收斂性質外更可於非週期函數中使用快速轉換運算提升模式計算效率, 是一個相當強大的計算工具。

1.2 研究動機與目的

Kuo et al. (2010) 利用分解定義域的方法成功的將模式定義域拆解爲各個子定義域藉由切比雪夫配置法進行運算, 他們的研究中顯示利用分解定義域搭配平行化計算的方法可有效的增進模式計算效率; 本研究將承接 Kuo et al. (2010) 的工作, 利用分解定義域之淺水方程對於海洋作一系列的正壓模擬研究。以物理海洋中經典的西方邊界流現象爲基礎, 我們設計了海洋模式中的控制方程, 並利用海洋邊界層作爲分界, 將模式定義域區分爲各個子定義域進行運算, 且設計各子定義域間交錯兩個網格點 (一個網格間距) , 使得各個子定義域彼此能相互交換邊界條件以進行模擬。在海洋邊界層模擬中, 我們將使用二階中差分法搭配沉浸邊界法有效地處理複雜邊界對海洋模式的挑戰; 而在海洋邊界層以外的區域, 我們將利用切比雪夫配置法進行運算, 精確且有效率的解析海洋中的波動現象。透過這樣的定義域分解法, 我們希望能夠整合沉浸邊界法與切比雪夫配置法, 擷取兩者在計算上的優勢, 建立出一套兼具高精確度以及高效率的計算方法。

本研究共分爲五章, 第一章敘述研究背景架構與動機, 第二章將就研究中所使用到的各種研究方法進行有系統的介紹, 第三章則將詳細說明研究中所設計之各類數值模式, 第四章將展現各數值模式模擬之實驗結果, 第五章則會爲研究結果進行總結, 最後則將整理出研究中所引用的參考文獻以及所繪製之圖表。

第 2 章

研究方法

2.1 西方邊界流理論

海洋洋流常受大氣風應力所驅動, 稱之爲風生環流 (Wind-driven circulation) ; 然而, 風生環流質量傳送的方向與海表風向並不相同, Nansen (1898) 利用了風應力、科氏力與底面摩擦力之三力平衡關係定性的解釋了冰山運動方向與風向間的關係, 如圖1所示。他認爲初始時海表風應力確實會使得冰山隨風場方向運動, 但一旦冰山開始運動後, 科氏力與底部摩擦力將同時產生, 其中科氏力將使冰山往原運動方向的右側偏轉 (北半球) , 底部摩擦力則會抵制冰山離開原靜止位置開始運動; 即洋流運動不僅受到風應力的影響, 須加入科氏力與底部摩擦力一併考慮, 故風生環流傳送方向與海表風向不同, 將往風向的右側偏轉。

建立在 Nansen 的概念模式下, Ekman (1905) 試圖定量地解釋洋流傳送方向與海表風向之間的關係, 藉由假設 (1) 海洋均質且洋面水平 (2) 海洋水平無邊界 (3) 海洋無窮深 (4) 摩擦係數(A_z)與科氏參數 (f) 爲定值 (5) 穩定的大氣風場驅動洋流

至穩定態, 他省略海洋中的壓力梯度力、側邊摩擦力以及底部摩擦力等項的計算, 將海洋的控制方程簡化爲科氏力與摩擦力平衡之 (2.1)

$$
\begin{aligned}
fv_E + A_z \frac{\partial^2 u_E}{\partial z^2} = 0, \\
-fu_E + A_z \frac{\partial^2 v_E}{\partial z^2} = 0
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

其中u_E與v_E分別爲緯向與經向的艾克曼速度場。若大氣僅有經向風速, 則 (2.1) 的解可簡化爲

$$
\begin{aligned}
u_E = \pm V_0 \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi z}{D_E}) exp(\frac{\pi z}{D_E}), \\
v_E = V_0 \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi z}{D_E}) exp(\frac{\pi z}{D_E})
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

其中,$V_0 = \sqrt{2}\pi\tau/(D_E\rho|f|)$爲艾克曼表層洋流速率,$\tau$爲海表風應力,$D_E = \pi(2A_z/|f|)^{1/2}$爲艾克曼層厚度; 以北半球爲正。故我們可發現洋流流速在海表面有最大值, 並與風向順時針夾45^o (北半球) , 而隨著深度的增加, 洋流流速漸減且方向呈現順時針旋轉, 這個現象即爲所謂的艾克曼螺旋 (Ekman spiral) , 如圖2所示。透過以上的五項假設,Ekman 成功的將 Nansen 所提出的概念模式做出定量化的解釋; 證明了北半球洋流確實會往海表風向的右側做淨質量傳送; 然而, 這些假設也是艾克曼螺旋最受爭議的地方。

Sverdrup (1947) 試圖修正 Ekman 的假設, 他認爲洋面水平之假設是非常不合乎邏輯的, 不可爲了簡化運動方程而忽略壓力梯度力; 故他在 Ekman 的方程式加

入壓力梯度力, 修正爲 (2.3) 。

$$\begin{aligned} \alpha\frac{\partial p}{\partial x} &= fv + \alpha\frac{\partial \tau_x}{\partial z}, \\ \alpha\frac{\partial p}{\partial y} &= -fu + \alpha\frac{\partial \tau_y}{\partial z} \end{aligned} \tag{2.3}$$

若定義海表面處$z = 0$, 且海表風應力僅影響至$z = -h$的深度, 則將 (2.3) 垂直積分即可得到

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{0}\frac{\partial p}{\partial x}dz &= \int_{-h}^{0}\rho f v dz + \tau_x = fM_y + \tau_x, \\ \int_{-h}^{0}\frac{\partial p}{\partial y}dz &= -\int_{-h}^{0}\rho f u dz + \tau_y = fM_x + \tau_y, \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中M_x與M_y分別代表洋流於緯向以及經向的淨質量傳送,τ_x與τ_y各爲海表風應力於東西以及南北向的分量, 藉由 (2.4) , 我們可發現洋流淨質量傳送與該層之壓力梯度力以及表層風應力之間的關係。若我們對 (2.4) 中第一式取東西向微分, 第二式取南北向微分, 並將微分後兩式相減, 則 (2.4) 可進一步簡化爲

$$\beta M_y = \nabla \times \tau \tag{2.5}$$

(2.5) 即爲海洋中著名的 Sverdrup 方程式。藉由 (2.5) , 我們可發現風生環流於經向的質量傳送僅與海表風應力的旋度有關, 海表風應力旋度爲負時表示淨質量向南傳送, 正則反之; 此外, 由於 (2.5) 適用於β平面上, 故應用尺度較 (2.2) 爲大。若我們將大氣環流理想化, 假設風場僅爲緯度的函數, 則可發現在中緯西風低緯東風的理想風場下, 海表風應力旋度將爲負值, 故海洋將有淨質量向赤道傳送的現象; 透過這樣的經向質量傳送, 海洋得以平衡由大氣所提供的負渦度, 保持絕對渦度守恆, 是海洋中重要的機制之一。然而,Sverdrup 的理論雖能良好地解釋海洋絕對渦度守

恆的性質, 可有效的應用於大尺度的海洋運動, 卻無法適用於海洋整體; 原因在於海洋流體具有連續性, 向南與向北的質量傳送量值必定相等, 故海洋中特定區域必定不遵守 (2.5) , 且由於 Sverdrup 的理論忽略側邊摩擦力的效應, 這個特定區域可能位於海洋側邊界。

根據質量守恆的觀點, 海洋的東邊界與西邊界層中應有快速的向北補償運動以平衡由風應力所引起的海洋質量向南傳送; 然而, 觀測資料卻顯示向北的補償運動具有高度不對稱性存在, 洋流僅於海洋的西邊界做向北的補償作用, 且由於西邊界層尺度遠較海洋整體爲小的緣故, 海洋西邊界層內具有海水經向速率極大值, 稱之爲西方邊界流, 如圖3所示。Stommel與 Munk 等人試圖於 Sverdrup 的理論中分別加入底部摩擦力 (Bottom friction) 以及側邊摩擦力 (Lateral friction) 進行修正, 利用穩定態 (Steady state) 的觀點討論西方邊界流生成的動力機制; 在此我們使用 Munk 的理論進行討論。由於海洋流體運動已達到穩定態, 故系統內除洋流質量須守恆外更須加入絕對渦度守恆一併考慮。若同樣考慮中緯西風低緯東風的大氣理想風場, 則大氣風應力將不斷地向海洋提供負渦度; 由於海洋西邊界處洋流向北的關係, 故流體塊相對渦度將減小 (行星渦度增大) , 因此, 海洋西邊界的流體塊向北運動時相對渦度將爲負值, 需有其餘正渦度的介入才能維繫西方邊界流絕對渦度的守恆。Munk的理論假設海洋中有側邊摩擦力存在, 故海洋西邊界的向北運動於鄰近邊界處將因側邊摩擦力而產生速度差, 進而造成正渦度的產生; 此正渦度恰可平衡由大氣風應力以及流體塊向北運動所產生的負渦度, 藉以保持海洋西邊界的絕

對渦度。相反的, 海洋東邊界處因向南運動將使得流體塊相對渦度增加, 且由側邊摩擦力所生的速度差同樣的會造成正渦度的產生; 然而, 大氣風應力所提供的負渦度值是固定的, 故由側邊摩擦力所生的正渦度值不可太大, 因此限制了海洋於東邊界向南運動的速度。故在穩定態時絕對渦度守恆的條件下, 我們可清楚的發現海洋中僅能存有西方邊界流。

除了穩定態的觀點外, 西方邊界流現象更可利用瞬態 (Transient state) 調節下羅士比波能量傳遞機制的觀點來解釋。Chelton et al. (1996) 利用衛星資料清楚地驗證了海洋羅士比波的存在, 海洋中羅士比波的頻散關係爲

$$\omega = \frac{-\beta K}{K^2 + L^2} \tag{2.6}$$

其中 K 與 L 分別代表東西向以及南北向的羅士比波波數; 若令 $x = \frac{K}{L}$ 作爲東西向長短波的分界, 則我們可將 (2.6) 重新整理爲

$$\frac{\omega L}{\beta} = \frac{-x}{x^2 + 1} \tag{2.7}$$

利用 (2.7) , 我們可將羅士比波的頻散關係定量化, 如圖4所示。故我們可發現以東西向波數與南北向波數相等時 $(x = 1)$ 爲分界點, 東西向長波時 $(x < 1)$ 羅士比波群速度爲負值, 故波動能量將向西傳遞, 反之, 東西向短波時 $(x > 1)$ 波動能量則向東傳遞; 此外, 由於$\frac{\partial \omega}{\partial x}$的變化率在東西向長波時較大的關係, 我們可發現海洋中波長較長的羅士比波會將能量快速的往西方邊界傳送, 但由西方邊界往東回傳的能量僅能透過波長較短的羅士比波慢速地向東傳遞, 這樣的速度差使得波動能量在海洋西方邊界產生累積, 造成了海洋中西方邊界流現象。

2.2 切比雪夫配置法

2.2.1 有限定義域之波譜方法

Fulton et al. (1987) 對於有限定義域之波譜方法進行了詳細的分析與研究; 波譜方法的基本原理是將微分方程的解利用一組已知函數作爲基底進行展開, 舉例來說, 考慮偏微分方程的一般式:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Lu(x,t) = f(u,x,t) \tag{2.8}$$

其中 x 與 t 分別代表空間以及時間座標,L 爲空間中的線性運算子,f 則爲強制項 (Forcing) 。若利用 $\phi_n(x)$ 作爲基底進行展開, 我們可得到 (2.8) 的近似解

$$u_N(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \hat{u}_n(t)\phi_n(x) \tag{2.9}$$

其中$\hat{u}_n(t)$爲波譜係數。但透過函數展開所得到的近似解$u_N(x,t)$不一定會滿足原微分方程之解 $u(x,t)$, 兩者之間可能有餘量存在; 在此我們選用配置法 (Collocation method) 使得餘量達到最小, 其意義是令餘量在配置點 (Collocation points) 上等於零, 強制地使餘量消失, 藉以將波譜方法有效地應用於空間微分之計算中使用。這類波譜方法在各積分時步中可於波譜空間有效地進行空間微分之運算, 具有於物理空間給定函數適當邊界條件之特性, 且需額外搭配其他數值積分法以對於下一個積分時步之函數值進行預報; 故又稱爲假波譜法 (Psudospectral methods) , 其數值計算不僅局限於波譜空間, 而需橫跨波譜空間與物理空間以得到最終之數值穩定解。

由 (2.9) , 我們可清楚地發現基底函數的選擇對於波譜方法的使用相當重要; 爲了確保波譜方法可有效率的將任意函數解展開, 基底函數須同時具有正交性 (Orthogonality) 以及完備性 (Completness) 等性質, 故一般常選擇 Sturm-Liouville 方程的解作爲基底函數使用。在有限定義域 [a,b] 中,Sturm-Liouville 方程的一般式爲

$$L_{SL}\phi(x) = -[p(x)\phi'(x)]' + q(x)\phi(x) = \lambda w(x)\phi(x) \tag{2.10}$$

其中 $p(x)$、$q(x)$ 與 $w(x)$ 爲在 [a,b] 中連續的實數函數,λ爲特徵值,$\phi(x)$爲對應之特徵方程。若定義權重內積爲

$$(f,g)_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \tag{2.11}$$

則可證明$(\phi_i,\phi_j)_w = \delta_{i,j}$, 即所有滿足 (2.10) 的特徵方程之間皆具有正交性質; 這樣的特徵方程將構成一組完備的基底, 得以讓足夠平滑的函數藉由適當的係數進行展開, 如 (2.12) 。

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u_n}\phi_n(x), \hat{u_n} = (u,\phi_n)_w \tag{2.12}$$

即便具有正交且完備的基底, 波譜方法的優劣仍取決於收斂速度的快慢, 這是因爲計算上無法以無窮多項基底將原函數展開的關係, 因此, (2.12) 必須在一恰當的 n 值下做截斷, 而收斂速度的快慢則決定了 n 值的大小。藉由 (2.10) , 我們得到特徵函數爲

$$\phi_n(x) = \lambda_n^{-1}w^{-1}(x)\{-[p(x)\phi'(x)]' + q(x)\phi(x)\} \tag{2.13}$$

因此, (2.12) 所定義的波譜係數爲

$$\begin{aligned}\hat{u}_n &= \lambda_n^{-1}(u, w^{-1}L\phi_n)_w \\ &= \lambda_n^{-1}[B(u,\phi_n) + (v,\phi_n)_w]\end{aligned} \tag{2.14}$$

其中 $B(u,\phi_n) = p(x)[u'(x)\phi_n(x) - u(x)\phi_n'(x)]\,|_{x=a}^{x=b}$, $v = w^{-1}Lu$; 因此, $\hat{u}_n$ 的收斂速度將由 $B(u,\phi_n)$ 以及函數的平滑性所決定。舉例來說, 傅氏級數的 $p(x) = 1$, 故在週期邊界條件下 $B(u,\phi_n) = 0$, 若函數足夠平滑, 則可不斷地對 $(v,\phi_n)_w$ 進行分布積分, 得到 $\hat{u}_n \sim \lambda_n^{-m}$, 其中 m 爲函數可微分的最高次數; 且 Courant and Hilbert (1953) 證明了當 n 趨近於無窮大時 $\lambda_n = O(n^2)$, 故我們可發現 $\hat{u}_n$ 成指數收斂。但在有限定義域的模擬中, 週期邊界條件並不適用, 故無法有效利用傅氏展開求解; 然而, 切比雪夫微分方程有 $p(x) = (1-x^2)^{1/2}$,$q(x) = 0$ 以及 $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ 的形式, 故在任意邊界條件下皆滿足 $B(u,\phi_n) = 0$, 因此, 只要函數夠平滑, 切比雪夫多項式即具有指數收斂的性質, 可實際應用於有限定義域的模擬中。

2.2.2 切比雪夫多項式

切比雪夫多項式 (Chebyshev polynomial) 的一般式爲 $T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}(x))$, 故當配置點 x_j 定義於 $x_j = \cos\theta = \cos\frac{j\pi}{n}, (j = 0, 1, ..., n)$ 時, 切比雪夫多項式可表示爲

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta, n = 0, 1, ... \tag{2.15}$$

因此, 切比雪夫多項式在計算上可利用快速傅立葉轉換的計算方法, 藉以增進計算效率。此外, 由上節推導中可知切比雪夫多項式組成了一組正交且完備的基底, 且

其收斂速率僅與函數平滑度有關, 不受限於邊界條件; 故可發現切比雪夫多項式除可使用快速轉換增進計算效率外, 更不需滿足週期邊界條件即具有指數收斂性質, 非常適合應用於有限定義域的模擬中。

藉由 (2.11) , 我們可定義切比雪夫內積爲

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \tag{2.16}$$

藉由 (2.16) , 我們可證明切比雪夫多項式具有正交性質

$$< T_m, T_n >= \frac{\pi}{2} c_n \delta_{mn},\ c_n = \begin{cases} 2 & , n = 0 \\ 1 & , n > 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

故我們可對已知函數$\psi(x)$利用切比雪夫多項式作爲基底展開

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\psi_n} T_n(x) \tag{2.18}$$

其中$\hat{\psi_n}$爲切比雪夫波譜係數, 利用切比雪夫多項式的正交性質, 我們可得到

$$\hat{\psi_n} = \frac{2}{\pi c_n} < \psi, T_n >, n = 0, 1, ... \tag{2.19}$$

考慮於第 N 項切比雪夫多項式截斷的情形, (2.18) 可表示爲

$$\psi_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \hat{\psi_n} T_n(x) \tag{2.20}$$

上式即可有效應用於實際計算中使用。

切比雪夫配置法 (Chebyshev collocation method) 利用 (2.20) 近似原函數$\psi(x)$, 以簡單的一維線性平流方程$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$爲例; 在空間微分的計算上, 首先利用 (2.19)

將原函數由物理空間轉換至波譜空間, 利用切比雪夫遞迴關係式 (2.21) 於波譜空間中計算空間微分值, 再將結果由 (2.20) 逆轉換回物理空間, 於物理空間中給定邊界條件後, 即完成一次切比雪夫配置法的計算。在計算中享有快速轉換與指數收斂等性質, 且不受限於週期邊界條件, 可有效應用於有限定義域之模擬; 最後再配合其他時間積分方法即可對函數值進行數值預報。

$$c_{n-1}\hat{u}_{n-1}^{(1)} - \hat{u}_{n+1}^{(1)} = 2n\hat{u}_n, \hat{u}_n^{(1)} = \frac{d\hat{u}_n}{dx} \tag{2.21}$$

2.3 沉浸邊界法

2.3.1 沉浸邊界法理論

沉浸邊界法 (Immersed boundary methods) 最早由 Peskin (1972) 所提出, 用於模擬心血管疾病中血液的流動; 由於這類方法可有效率地處理模式中複雜邊界所帶來的挑戰因而被廣爲利用, 後來普遍泛指所有不需改變模式網格點設計, 於直角座標系中藉由沉浸邊界即可給定模式所需邊界條件, 有效處理模式中複雜邊界的方法。這類方法的特色是在模式固體邊界中加入網格點一併模擬, 稱之爲沉浸邊界, 這是對於邊界存在性質的全新定義; 邊界在此僅視爲給定流體人造力 (Artifial forcing) 使流體運動受到阻礙的網格點, 而不再是傳統認知中流體運動的終點, 藉由此人造力量值即可間接給定模式邊界條件, 故不需藉由強制調整模式網格點與固體邊界相符即可良好地處理複雜邊界, 概念上與電磁學中鏡面法的使用類似。Mittal et al.

(2005) 利用人造力給定方法的差異將沉浸邊界法分爲連續強迫 (Continuous forcing approach) 與不連續強迫 (Discrete forcing approach) 兩類; 前者藉由分佈方程將人造力分配於鄰近邊界各網格點上, 後者則先忽略邊界人造力作用, 逕行將控制方程離散化, 完成模式網格點配置後再利用內差的方法決定人造力量值, 間接地給定模式邊界條件。

不連續強迫的沉浸邊界法由於不需定義分佈方程參數, 故在使用上更爲客觀,Tseng et al. (2003) 所利用的虛網格沉浸邊界法 (Ghost cell immersed boundary method) 即屬於此類; 藉由決定沉浸邊界上網格點 (虛網格) 函數值, 即可定義邊界強迫力量值, 進而間接給定模式邊界條件。以離散化的 (2.8) 爲例

$$\frac{u_i^{n+1}(x,t) - u_i^n(x,t)}{\Delta t} + Lu_i^n(x,t) = f_i^n \tag{2.22}$$

若我們欲藉由虛網格函數值間接地給定下一時間的邊界條件$u_i^{n+1} = V_i^{n+1}$, 則 (2.22) 之強迫項可表示成

$$f_i^n = \frac{V_i^{n+1}(x,t) - u_i^n(x,t)}{\Delta t} - Lu_i^n(x,t) \tag{2.23}$$

也就是說, 於模式中加入虛網格進行計算後, 將於邊界處產生強迫項, 透過此強迫項之作用即可間接決定每個時步之邊界條件, 故不需藉由分佈方程對人造力進行分配即可於直角座標系中給定複雜邊界之邊界條件。

2.3.2 虛網格沉浸邊界法

在模式中定義各網格點後, 首先須藉由邊界位置與網格點間之配置關係定義虛網格所在, 若網格點位置處於固體邊界內部則爲虛網格點, 如圖5所示。由於虛網格點之函數值僅作用於人造力之產生, 藉以簡易地給定模式邊界條件; 故其與所模擬流體之運動性質無直接關係, 不得使用模式控制方程計算求解, 而需藉由數值內差的方法利用鄰近各網格點流體函數值之分佈情形定義虛網格點處函數值。內差使用的意義在於無邊界存在時流體連續性之假設, 如此一來則不需於邊界上藉由網格點之使用給定模式邊界條件, 而可將欲指定的邊界條件透過數值內差的方法反應於虛網格點上; 虛網格點的使用將於數值計算中造成額外的強迫項, 使得邊界處須滿足指定的邊界條件。因此, 虛網格沉浸邊界法的使用僅需定義邊界處座標與所欲給定之邊界條件即可; 邊界的存在不需以網格點之形式出現於模式中, 故可於直角座標系中處理複雜邊界的問題。

我們利用以狄氏邊界條件 (Dirichlet boundary condition) 說明虛網格點函數值之內差計算, 考慮圖6所示之網格點配置, G 爲虛網格點, X_1 與 X_2 爲鄰近網格點, O 爲模式邊界; 兩度空間之線性內差格式爲

$$\phi = a_0 + a_1 x + a_2 y \tag{2.24}$$

其中ϕ爲函數值, x 與 y 分別爲橫軸與縱軸座標值。故我們可藉由X_1、X_2以及 O 三點之座標與函數值決定 (2.24) 之內差係數

$$a = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

最後再代入虛網格座標值即可求得虛網格點之函數值; 在實際應用中僅需在初始時於各虛網格點處計算 a 值, 並將其儲存以待每個時步使用即可。然而, 這樣的方法仍有其侷限性, 當選用的流體網格點與邊界距離太近時, a矩陣於數值計算上可能會有不穩定產生; 爲了避免不穩定發生, 可先利用內差的方法計算虛網格點與邊界之對稱點 (圖6中 I 點) 的函數值, 再將其利用$\phi_G = 2\phi_O - \phi_I$內差回虛網格點。

類似的方法亦可應用於二階精確的內差格式, 兩度空間之二階精確內差形式爲

$$\phi = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 \tag{2.25}$$

其中ϕ爲函數值, x 與 y 分別爲橫軸與縱軸座標值。(2.25) 需要一個邊界資訊以及五個鄰近網格點才能對 a 矩陣中六個內差係數進行求解

$$a = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 & x_0^2 & x_0y_0 & y_0^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}$$

將 a 矩陣計算結果以及虛網格點座標代入 (2.25) 後即可得到虛網格點函數值; 故二階精確內差格式的使用除計算點數因自由度提高而增加外其餘皆與線性內差格式相同。Tseng et al. (2003) 分別利用 (2.24) 與 (2.25) 計算虛網格點之函數值, 測試不同內差方法使用虛網格沉浸邊界法對於模式收斂速度的影響, 證實了二階精確內差格式的使用由於較爲精確的關係, 收斂速度於模式邊界將可保持二階精確, 較線性內差格式的使用準確; 然而, 模式整體收斂速度則不受內差格式相異而改變, 兩種內差格式於模式整體中皆保有二階的收斂速度, 如圖7所示。因此, 虛網格沉浸邊界法雖可有效簡化複雜邊界對於模式網格點配置的影響, 但收斂速度將侷限於二階精確; 且在邊界上使用線性內差格式計算虛網格點函數值即可於模式中享有二階精確的收斂速度, 故在邊界誤差可容忍的範圍內較二階精確內差格式有效率。

第 3 章

模式設計

3.1 控制方程

兩度空間中海洋的運動方程爲

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} - w\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0}\nabla P - f\vec{k}\times\vec{v} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z} + A\nabla^2\vec{v} \tag{3.1}$$

即海洋中的水平加速度受到非線性平流、壓力梯度力、科氏力、海表風應力以及耗散項等作用影響。對於 (3.1) 取旋度並僅考慮垂直分量之作用, 引入靜力平衡近似後可得到海洋渦度方程式

$$\frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} = -\vec{v}\cdot\nabla\vec{\zeta} - v\beta + \vec{k}\cdot\nabla\times\frac{\tau_0}{H\rho_0} - K\vec{\zeta} + A\nabla^2\vec{\zeta} \tag{3.2}$$

故可知海洋中渦度時變率是由非線性渦度平流、行星渦度平流、風應力渦度 (Wind stress vorticity) 、底部摩擦力 (Bottom friction) 以及側邊摩擦力 (Lateral friction) 等項所控制。其中, 底部摩擦力的數學形式爲 $\frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} \sim -K\vec{\zeta}$, 即爲氣象上所熟知的瑞立摩擦 (Rayleigh friction) , 與大氣邊界層中艾克曼抽拉作用有著相同的數學形

式, 越強的渦旋越易產生旋消而耗散渦度, 故是來自底部的摩擦力, 作用於各種尺度; 側邊摩擦力的數學形式則爲 $\frac{\partial\vec{\zeta}}{\partial t} \sim A\nabla^2\vec{\zeta}$, 與擴散方程的形式相符, 故可想像其作用是將渦度擴散至四面八方, 故爲來自側邊的摩擦力, 作用著重於突顯小尺度現象。(3.2) 整合了第二章所討論的所有海洋動力機制, 暫態中渦度變化率與行星渦度平流間相互平衡即爲羅士比波的動力機制; 而在穩定態中, 非線性渦度平流與行星渦度平流兩項的平衡爲海洋中的慣性邊界層理論, 行星渦度平流與底部摩擦力兩項的平衡則爲 Stommel 所提出的底部邊界層理論, 行星渦度平流與側邊摩擦力間的平衡即爲 Munk 所提出的側邊邊界層理論, 最後, 行星渦度平流與風應力渦度間達成之平衡則爲 Sverdrup 所提出的絕對渦度平衡理論。故可知 (3.2) 涵蓋多重空間與時間尺度資訊, 研究中我們將以此式爲基礎, 進行一系列的正壓數值模擬。

3.2 一維非線性史托梅爾模式

3.2.1 控制方程

爲了詳細釐清非線性動力於海洋中所扮演的物理機制, 並檢驗研究中所選用數值方法的收斂速度, 我們設計於穩定態時有解析解的一維非線性史托梅爾模式 (1D nonlinear Stommel model); 建立在傳統上 Stommel 所提出的底部邊界層理論之下, 我們額外加入了非線性項進行模擬, 即海洋渦度時變率來自於非線性渦度平流、行星渦度梯度、風應力渦度以及底部摩擦力之影響, 控制方程爲

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}) + u_I\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}) + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = -K\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \tau \tag{3.3}$$

其中 ψ 爲流函數,u_I 爲平均流強度, 量值越大時表示非線性項越爲顯著, 在此假設爲常數。爲了釐清物理觀念, 我們選用無因次長度 $x^* = \frac{1}{L}x$, 無因次流函數 $\psi^* = \frac{\beta}{\tau L}\psi$ 以及無因次時間尺度 $t^* = \beta L t$ 對 (3.3) 進行無因次分析, 簡化後的方程式爲

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^{*2}}) + \frac{u_I}{\beta L^2}\frac{\partial^3\psi^*}{\partial x^{*3}} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x^*} = -\frac{K}{\beta L}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^{*2}} - 1 \tag{3.4}$$

藉由定義羅士比波的時間尺度爲 $t_{\text{Rossby}} = \frac{1}{\beta L}$, 非線性平流時間尺度爲 $t_{\text{adv}} = \frac{L}{u_I}$ 以及耗散時間尺度爲 $t_{\text{dissipation}} = \frac{1}{K}$, (3.4) 可整理爲

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^{*2}}) + \frac{t_{Rossby}}{t_{adv}}\frac{\partial^3\psi^*}{\partial x^{*3}} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x^*} = -\frac{t_{Rossby}}{t_{dissipation}}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^{*2}} - 1 \tag{3.5}$$

故我們所欲處理的現象爲一複雜的多重時間尺度問題, 當 t_{adv} 相對於 t_{Rossby} 爲大時, 非線性渦度平流作用不顯著, 穩定解將趨近於傳統的線性結果。若我們定義 $\varepsilon = \frac{K}{\beta L}$ 爲無因次的邊界層寬度, (3.4) 可表示爲

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^{*2}}) + \frac{u_I}{\beta L^2}\frac{\partial^3\psi^*}{\partial x^{*3}} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x^*} = -\varepsilon\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^{*2}} - 1 \tag{3.6}$$

利用 (3.6) 做爲控制方程, 並給定適當邊界條件後即可藉由數值模擬得到一維非線性史托梅爾模式之數值穩定解。

我們首先忽略非線性渦度平流作用, 進行 ε 量值的敏感度測試, 進而決定模式中西方邊界層寬度參數; 在 ε 值介於 0.025 至 0.2 之間, $\psi^*(x^*, 0) = 0$ 的初始條件下, 我們利用切比雪夫配置法搭配固體邊界條件計算 (3.6) 之空間微分項, 空間上使用32個切比雪夫配置點, 時間積分則使用四階容庫法 (Runge-Kutta 4th Order Method) 積分達穩定態, 藉由比較不同 ε 量值下西方邊界層寬度的差異, 我們即可

選定模式中需使用的 ε 量值。當 ε 量值決定後, 我們隨即對於 u_I 量值進行敏感度測試, 試圖由此分析非線性項之作用與其物理意義; 初始條件以及模式網格點配置皆與 ε 量值敏感度測試的設定相同, 同樣利用切比雪夫配置法搭配固體邊界條件對於 (3.6) 中完整的空間微分項求解, 時間積分法亦選用四階容庫法積分至穩定態。

了解非線性渦度平流的動力機制後, 我們欲比較切比雪夫配置法以及虛網格沉浸邊界法之收斂速度; 在穩定態且無平均流的條件下 (3.6) 可簡化爲

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} = -\varepsilon \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial {x^*}^2} - 1 \tag{3.7}$$

上式具有解析解

$$\psi^*(x^*) = C \exp \frac{-x^*}{\varepsilon} - 1 - x^*, C = \frac{1}{\exp \frac{-1}{\varepsilon} - 1} \tag{3.8}$$

我們於 (3.7) 中加入渦度時變率以進行數值模式預報

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial {x^*}^2}) + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} = -\varepsilon \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial {x^*}^2} - 1 \tag{3.9}$$

於空間中分別使用切比雪夫配置法搭配固體邊界條件以及二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法計算 (3.9) 之空間微分項, 時間積分法則同樣利用四階容庫法積分達穩定態; 將模擬結果之數值穩定解與 (3.8) 之解析解進行比較後即可計算於各空間解析度中之方均根誤差, 藉此即可於對數座標中分析所選用數值方法的收斂速度。

3.2.2 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件

爲測試不同空間解析度中切比雪夫配置法之方均根誤差, 我們於空間中使用 16 至 128 個切比雪夫配置點分別計算 (3.9) 之空間微分項, 時間積分法皆選用四階容庫法進行積分預報; 初始條件設定爲 $\psi^*(x^*,0) = 0$, 僅由風應力驅動海洋流體運動。在計算空間微分項時, 我們首先需決定截斷波數 n, 並利用 $x_j = \cos\frac{j\pi}{n}, (j = 0, 1, ..., n)$ 建立模式網格點; 網格點配置決定後, 即可將 (3.9) 表示爲

$$\frac{\partial}{\partial t^*}\bar{\psi}_j^{*(2)} + \bar{\psi}_j^{*(1)} = -\varepsilon\bar{\psi}_j^{*(2)} - 1 \tag{3.10}$$

其中下標 j 表示於第 j 個配置點進行運算, 上標 (1) 與 (2) 分別表示空間中之一次以及二次微分。利用切比雪夫配置法計算時可藉由 (2.19) 將無因次流函數場由物理空間轉換至波譜空間, 於波譜空間中利用 (2.21) 對波譜係數進行空間微分運算, 最後再將波譜空間之運算結果透過 (2.20) 逆轉換回物理空間即完成一次空間微分的計算。得到空間微分值後即利用四階容庫法進行時間積分, 並藉由固體邊界條件 $\psi^*(0) = \psi^*(1) = 0$ 設定邊界上無因次流函數場爲零, 積分時步爲一秒, 積分至 1000 秒後達穩定態。

3.2.3 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法

爲測試模式中邊界條件給法不同所造成收斂速度之差異, 我們利用二階中差分法分別搭配虛網格沉浸邊界法與固體邊界條件計算 (3.9) 中的空間微分項, 並以梯形法

進行時間積分; 若分別以 Δx 與 Δt 表示空間網格間距及積分時步, 則 (3.9) 之離散方程式可表示爲

$$(\frac{4+2\varepsilon\Delta t+\Delta x\Delta t}{4\Delta x^2})\psi^{*n+1}_{j+1}+(\frac{-2-\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2})\psi^{*n+1}_{j}+(\frac{4+2\varepsilon\Delta t-\Delta x\Delta t}{4\Delta x^2})\psi^{*n+1}_{j-1}=$$
$$(\frac{4-2\varepsilon\Delta t-\Delta x\Delta t}{4\Delta x^2})\psi^{*n}_{j+1}+(\frac{-2+\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2})\psi^{*n}_{j}+(\frac{4-2\varepsilon\Delta t+\Delta x\Delta t}{4\Delta x^2})\psi^{*n}_{j-1} \tag{3.11}$$

其中上標 n 與下標 j 分別表示網格點之時空位置。我們可利用三對角線矩陣 (Tridiagonal matrix) 對 (3.11) 求解, 在初始條件設定爲爲 $\psi^*(x^*,0)=0$ 下, 於空間上使用16至128個等間距網格點, 並藉由固體邊界條件 $\psi^*(0)=\psi^*(1)=0$ 、對稱虛網格沉浸邊界法以及非對稱虛網格沉浸邊界法等方法給定模式邊界條件, 積分時步爲一秒, 積分至1000秒後達穩定態。

延續著 Tseng et al. (2003) 的工作, 我們利用線性內差的方法給定虛網格點函數值; 在對稱虛網格沉浸邊界法中, 我們定義虛網格點至邊界距離與邊界至鄰近網格點之距離相同, 利用 (2.24) 可知虛網格點之函數值爲

$$\psi^*_{G_0}=2\psi^*_0-\psi^*_1,$$
$$\psi^*_{G_N}=2\psi^*_N-\psi^*_{N-1} \tag{3.12}$$

其中$\psi^*_{G_0}$與$\psi^*_{G_N}$分別表示模式左邊界與右邊界之虛網格點函數值。而在非對稱虛網格沉浸邊界法中, 我們定義虛網格點至邊界距離僅爲鄰近網格點與邊界相距之半,

同樣利用 (2.24) 可得到虛網格點函數值應爲

$$\begin{aligned} \psi^*_{G_0} &= \frac{1}{2}(3\psi^*_0 - \psi^*_1), \\ \psi^*_{G_N} &= \frac{1}{2}(3\psi^*_N - \psi^*_{N-1}) \end{aligned} \tag{3.13}$$

藉由比較 (3.12) 與 (3.13) 之收斂速度差異, 我們可鑑別內差方法的優劣對於模式收斂速度的影響。

3.2.4 切比雪夫配置法搭配虛網格沉浸邊界法

研究中利用分解定義域的方法計算 (3.9) 之數值穩定解, 測試切比雪夫配置法與虛網格沉浸邊界法兩種數值方法整合的可行性; 將模式定義域 $x^* = [0\ \ 1]$ 一分爲二, 其中 $x^* = [0\ \ 0.5]$由 (3.10) 利用切比雪夫配置法配合固體邊界條件 $\psi^*(0) = 0$ 計算, $x^* = [0.5\ \ 1]$ 藉由 (3.11) 利用二階中差分法配合虛網格沉浸邊界法 $\psi^*_{G_N} = 2\psi^*_N - \psi^*_{N-1}$ 模擬。爲將兩種方法整合, 我們以緊鄰邊界的切比雪夫配置點與邊界距離做爲二階中差分法離散網格間距, 並使兩子定義域間重疊兩個網格點 (一個網格間距) , 使得子定義域間可彼此提供邊界條件, 如圖8所示; 初始條件設定爲$\psi^*(x^*, 0) = 0$, 時間積分法使用四階容庫法, 積分時步爲一秒, 積分至1000秒後達穩定態。

3.3 二維正壓線性輻散模式

3.3.1 二維線性淺水方程

兩度空間的模擬中, 若以 (3.2) 做爲模式控制方程, 則需於每個時步中計算包桑方程 $\zeta = \nabla^2\psi$ 以及流函數場的四次微分方可進行預報; 爲了簡化兩度空間中高次微分運算於計算中的困難性, 我們使用二維淺水方程做爲模式控制方程, 物理意義與 (3.2) 相同, 雖於每個時步中需對水平速度與重力位高度等三個變數進行預報, 且需直接處理水平壓力梯度力, 但各項計算卻相對 (3.2) 容易的多。此外, 我們利用非線性項的有無對 (3.2) 進行分類, 以區分線性與非線性動力於海洋中所扮演的物理機制; 若以 u 表示東西向運動場, v 爲南北向運動場而 ϕ 爲重力位高度, 二維線性淺水方程式爲

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - fv &= \frac{\partial \phi}{\partial x} - Ku + A\nabla^2 u + \tau_x \\
\frac{\partial v}{\partial t} + fu &= \frac{\partial \phi}{\partial y} - Kv + A\nabla^2 v + \tau_y \\
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\bar{\phi}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

即水平加速度受科氏力、壓力梯度力、底部摩擦力、側邊摩擦力以及海表風應力所影響, 重力位高度則因速度場的輻合與輻散而變化。模式中假設風應力 τ 僅爲緯度的函數, 故 $\tau_y = 0$; 並利用餘弦函數 $\tau_x(y) = -\frac{\tau_0}{\rho_0 H}\cos(\frac{\pi y}{W})$ 設計低緯東風中緯西風的理想大氣風場, 如圖9所示。

模式給定 $u(x,y,0)=v(x,y,0)=\phi(x,y,0)=0$ 的初始狀態, 於初始時僅由風應力所驅動, 並依照西方邊界流生成的理想背景條件給定模式參數 (表 1) , 於中緯度 β 平面下進行模擬, 東西與南北定義域皆設定爲4000公里 (W) 。由於 (3.14) 無解析解, 故我們藉由檢驗模式中無因次動能之變化決定系統達穩定態的時間, 如圖10所示; 可發現模式積分15日後無因次動能量值僅略爲震盪, 趨近於定值, 顯示已達到穩定態, 故研究中於兩度空間的模擬中皆以15日做爲模式總積分時間, 以表示近似穩定解。

3.3.2 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件

兩度空間的切比雪夫配置法需藉由東西向切比雪夫多項式 $T_m(x)$ 與南北向切比雪夫多項式 $T_n(y)$ 展開, 若東西向與南北向截斷波數分別爲 M 與 N, (2.20) 可修正爲

$$\begin{bmatrix} u(x,y,t) \\ v(x,y,t) \\ \phi(x,y,t) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} u_{MN}(x,y,t) \\ v_{MN}(x,y,t) \\ \phi_{MN}(x,y,t) \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} \begin{bmatrix} \hat{u}_{mn}(t) \\ \hat{v}_{mn}(t) \\ \hat{\phi}_{mn}(t) \end{bmatrix} T_m(x')T_n(y') \tag{3.15}$$

其中 $x'=\frac{2x}{W}-1$, $y'=\frac{2y}{W}-1$, x 與 y 分別爲東西向與南北向切比雪夫配置點座標, 離散形式分別爲

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{W}{2}(\cos\frac{i\pi}{M}+1),\ (i=0,1,...,M) \\ y_j &= \frac{W}{2}(\cos\frac{j\pi}{N}+1),\ (j=0,1,...,N) \end{aligned} \tag{3.16}$$

利用 (3.15), 並以上標 (p,0) 與 (0,q) 分別表示東西向 p 次偏微分及南北向 q 次偏微分, 下標 ij 表示二維切比雪夫配置點 (x_i,y_j) , 則於空間微分中利用切比雪夫配

置法計算的 (3.14) 可表示爲

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_{ij}}{\partial t} - f_{ij}\bar{v}_{ij} &= -\bar{\phi}_{ij}^{(1,0)} - K\bar{u}_{ij} + A\bar{u}_{ij}^{(2,2)} + \tau_{ij} \\
\frac{\partial \bar{v}_{ij}}{\partial t} + f_{ij}\bar{u}_{ij} &= -\bar{\phi}_{ij}^{(0,1)} - K\bar{v}_{ij} + A\bar{v}_{ij}^{(2,2)} \\
\frac{\partial \bar{\phi}_{ij}}{\partial t} &= -\bar{\phi}(\bar{u}_{ij}^{(1,0)} + \bar{v}_{ij}^{(0,1)})
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

模擬中利用 (3.16) 設計模式中二維切比雪夫配置點座標, 於東西與南北方向各設置 72 個切比雪夫配置點進行模擬 (M = N = 72) , 並藉由 (3.17) 做爲模式控制方程; 空間微分項利用切比雪夫配置法進行計算, 於計算時先逆操作 (3.15) 得到波譜係數, 並於波譜空間中利用 (2.21) 進行空間微分運算, 最後再將計算結果透過 (3.15) 由波譜空間轉換回物理空間即完成一次二維切比雪夫配置法計算。模式時間積分以四階容庫法進行, 以 $u(x,y,0) = v(x,y,0) = \phi(x,y,0) = 0$ 的初始條件開始積分, 積分時步爲 10 秒, 於每次積分預報後藉由 $u(0,y,t) = u(W,y,t) = 0$ 以及 $v(x,0,t) = v(x,W,t) = 0$ 給定固體邊界條件, 積分至 15 日得到近似穩定解。

3.3.3 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法

我們使用二階中差分法計算 (3.14) 之空間微分項, 離散網格點配置採用 Arakawa A-grid, 以行 (Column) 方向爲東西向, 列 (Row) 方向爲南北向, 於每一個網格點上皆進行 u 、v 與 ϕ 的預報, 如圖 11 所示; 若以 Δx 表示模式東西向網格間距, Δy 表示模式南北向網格間距, 下標 i, j 表示模式網格點座標 (x_i, y_j) , 則 (3.14) 使用二

階中差分法之離散形式可表示爲

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_{ij}}{\partial t} &= f_{ij}v_{ij} - \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x} - Ku_{ij} + \tau_{i,j} \\
&\quad + A(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2}) \\
\frac{\partial v_{ij}}{\partial t} &= -f_{ij}u_{ij} - \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y} - Kv_{ij} \\
&\quad + A(\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{\Delta y^2}) \\
\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial t} &= -\bar{\phi}(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y})
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

其中 $i = 0, 1, .., NX$; $j = 0, 1, ..., NY$; NX 與 NY 分別表示東西向與南北向使用的網格點數。

我們欲使用虛網格沉浸邊界法給定 (3.18) 邊界條件, 由以上的網格點配置可知 $i = -1, NX + 1$ 以及 $j = -1, NY + 1$ 處爲模式沉浸邊界, 藉由 (2.24) , 我們可利

用線性內差的方法藉由鄰近諸點函數值決定虛網格點函數值

$$
\left.
\begin{aligned}
u_{-1,j} &= 2u_{0,j} - u_{1,j} \\
u_{NX+1,j} &= 2u_{NX,j} - u_{NX-1,j} \\
u_{i,-1} &= 2u_{i,0} - u_{i,1} \\
u_{i,NY+1} &= 2u_{i,NY} - u_{i,NY-1} \\
v_{-1,j} &= 2v_{0,j} - v_{1,j} \\
v_{NX+1,j} &= 2v_{NX,j} - v_{NX-1,j} \\
v_{i,-1} &= 2v_{i,0} - v_{i,1} \\
v_{i,NY+1} &= 2v_{i,NY} - v_{i,NY-1} \\
\phi_{-1,j} &= 2\phi_{0,j} - \phi_{1,j} \\
\phi_{NX+1,j} &= 2\phi_{NX,j} - \phi_{NX-1,j} \\
\phi_{i,-1} &= 2\phi_{i,0} - \phi_{i,1} \\
\phi_{i,NY+1} &= 2\phi_{i,NY} - \phi_{i,NY-1}
\end{aligned}
\right\} \tag{3.19}
$$

利用 (3.19) 給定之沉浸邊界條件相較於上節之固體邊界條件複雜的多, 原因在於使用切比雪夫配置法進行空間微分運算時僅藉由波譜係數之遞迴關係 (2.21) 計算, 不需配合各配置點於物理空間中函數值資訊, 故邊界條件僅需加諸於計算邊界即可; 然而, 二階中差分法於邊界處 (如$i = 0$) 計算微分時, 卻需仰賴物理邊界以外的資訊 ($i = -1$) , 因此, 虛網格沉浸邊界法的使用除可有彈性的給定模式邊界條件外, 更可使模式於邊界的計算不需降低數值方法精確度處理, 故有看似較爲複雜的形式。

模擬中以 (3.18) 做爲模式控制方程, 模式中於東西與南北方向皆使用256個等間距網格點進行模擬 ($NX = NY = 256$) , 時間積分選用四階容庫法進行, 以 $u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = \phi(x, y, 0) = 0$ 的初始條件開始積分, 積分時步爲10秒, 於各積分時步預報結果中利用虛網格沉浸邊界法 (3.19) 間接給定模式邊界條件, 積分至15日得到近似穩定解。

爲測試分解定義域於二階中差分法與沉浸邊界法中的使用, 我們將原模式東西向定義域分爲 $X_L = [0\ \ 2000]$ 公里與 $X_R = [2000\ \ 4000]$ 公里兩部分, 並以單一定義域模擬中所使用之東西向與南北向網格間距進行各子定義域之網格點配置, 且設定左右兩子定義域於交界處東西向重疊兩個網格點 (即一個網格間距) , 以利子定義域間相互提供邊界條件進行數值模擬, 如圖12所示。若以下標 L、R 分別表示左右兩子定義域, 則左子定義域之邊界條件可表示爲

$$
\left.
\begin{aligned}
u_{L_{-1,j}} &= 2u_{L_{0,j}} - u_{L_{1,j}} \\
u_{L_{NXL+1,j}} &= 2u_{L_{NXL,j}} - u_{LNXL-1,j} \\
u_{L_{i,-1}} &= 2u_{L_{i,0}} - u_{L_{i,1}} \\
u_{L_{i,NYL+1}} &= 2\underline{u_{R_{i,0}}} - u_{L_{i,NYL-1}} \\
v_{L_{-1,j}} &= 2v_{L_{0,j}} - v_{L_{1,j}} \\
v_{L_{NXL+1,j}} &= 2v_{L_{NXL,j}} - v_{L_{NXL-1,j}} \\
v_{L_{i,-1}} &= 2v_{L_{i,0}} - v_{L_{i,1}} \\
v_{L_{i,NYL+1}} &= 2v_{L_{i,NYL}} - v_{L_{i,NYL-1}} \\
\phi_{L_{-1,j}} &= 2\phi_{L_{0,j}} - \phi_{L_{1,j}} \\
\phi_{L_{NXL+1,j}} &= 2\phi_{L_{NXL,j}} - \phi_{L_{NXL-1,j}} \\
\phi_{L_{i,-1}} &= 2\phi_{L_{i,0}} - \phi_{L_{i,1}} \\
\phi_{L_{i,NYL+1}} &= 2\phi_{L_{i,NYL}} - \phi_{L_{i,NYL-1}}
\end{aligned}
\right\} \quad (3.20)
$$

右子定義域之邊界條件則爲

$$
\left.
\begin{aligned}
u_{R_{-1,j}} &= 2u_{R_{0,j}} - u_{R_{1,j}} \\
u_{R_{NXR+1,j}} &= 2u_{R_{NXR,j}} - u_{RNXR-1,j} \\
u_{R_{i,-1}} &= 2\underline{u_{L_{i,NYR}}} - u_{R_{i,1}} \\
u_{R_{i,NYR+1}} &= 2u_{R_{i,NYR}} - u_{R_{i,NYR-1}} \\
v_{R_{-1,j}} &= 2v_{R_{0,j}} - v_{R_{1,j}} \\
v_{R_{NXR+1,j}} &= 2v_{R_{NXR,j}} - v_{R_{NXR-1,j}} \\
v_{R_{i,-1}} &= 2v_{R_{i,0}} - v_{R_{i,1}} \\
v_{R_{i,NYR+1}} &= 2v_{R_{i,NYR}} - v_{R_{i,NYR-1}} \\
\phi_{R_{-1,j}} &= 2\phi_{R_{0,j}} - \phi_{R_{1,j}} \\
\phi_{R_{NXR+1,j}} &= 2\phi_{R_{NXR,j}} - \phi_{R_{NXR-1,j}} \\
\phi_{R_{i,-1}} &= 2\phi_{R_{i,0}} - \phi_{R_{i,1}} \\
\phi_{R_{i,NYR+1}} &= 2\phi_{R_{i,NYR}} - \phi_{R_{i,NYR-1}}
\end{aligned}
\right\} \quad (3.21)
$$

藉由 (3.18) 做爲兩子定義域之控制方程, 初始條件分別爲 $u_L(x,y,0) = v_L(x,y,0) = \phi_L(x,y,0) = 0$ 與 $u_R(x,y,0) = v_R(x,y,0) = \phi_R(x,y,0) = 0$, 我們於模式左 (右) 子定義域之東西向及南北向分別使用128 (129) 與256 (256) 個網格點進行模擬, 空間中利用二階中差分法計算 (3.18) 之空間微分項; 時間積分皆使用四階容庫法進行積分, 積分時步爲10秒, 每次積分預報後於左右兩子定義域分別使用 (3.20) 與 (3.21) 給定邊界條件, 積分至15日後得近似穩定解。

3.3.4 切比雪夫配置法搭配虛網格沉浸邊界法

我們利用分解定義域的方式, 將模式定義域分解爲左邊界 (L) 、右邊界 (R) 以及海洋中央 (C) 等三個子定義域, 分別利用二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法以及切比雪夫配置法搭配開放式邊界條件 (Open boundary condition) 計算空間微分項, 如圖13所示。在模式網格點設計上, 首先藉由 (3.16) 決定內層切比雪夫配置法子定義域東西向與南北向配置點座標, 再利用東西向切比雪夫配置點緊鄰邊界之兩配置點距離做爲兩側二階中差分法子定義域中東西向網格間距 (Δx) ; 且設計兩側子定義域皆與中央切比雪夫子定義域於東西向重疊兩個網格點 (一個網格間距) , 使得各子定義域間可相互提供邊界條件, 兩側中差分法子定義域之南北向網格點則維持等間距網格點, 網格配置示意圖如圖14所示。利用圖14之網格點配置, 我們將原東西向定義域分解爲 $X_L = [0\ \ 1250]$ 公里、$X_C = [1250\ \ 2750]$ 公里以及 $X_R = [2750\ \ 4000]$ 公里等三份, 中央切比雪夫子定義域於東西向及南北向各使用16個切比雪夫配置點藉由 (3.17) 做爲控制方程進行模擬, 兩側二階中差分法子定義域則於南北向使用256個等間距網格點利用 (3.18) 爲控制方程進行模擬; 各子定義域時間積分皆使用四階容庫法, 積分時步爲1秒, 於各時步預報後交換網格點資訊以相互提供邊界條件。

模式物理邊界中仍依照固體邊界條件假設垂直邊界之速度場爲零, 然而, 藉由分解定義域計算時需於各子定義中皆給定適當的邊界條件, 在此我們利用子定義域邊界處重疊的方法使子定義域間可彼此提供邊界條件, 但由圖14可發現, 子定義域間

之合併邊界處南北向網格點並不重合, 故在交換邊界條件時, 需使用內差的方法計算各網格點函數值以相互給定開放式邊界條件; 兩側二階中差分法子定義域利用三次雲形線 (Cubic spline) 的方法將合併邊界處函數值內差至中央切比雪夫子定義域之邊界配置點上做爲邊界條件, 而在中央切比雪夫子定義域中, 則是先將合併邊界處函數值利用 (2.19) 由物理空間轉換至波譜空間, 進而藉由波譜係數計算兩側二階中差分法子定義域邊界網格點上之函數值以給定邊界條件。若分別以NX與NY表示子定義域於東西向及南北向使用之網格點數, 並以上標 表示藉由內差所得到的函數值, 則左側二階中差分法子定義域利用沉浸邊界法所給定的沉浸邊界條件爲

$$\left.\begin{aligned}
u_{L_{-1,j}} &= 2u_{L_{0,j}} - u_{L_{1,j}} \\
u_{L_{NXL+1,j}} &= 2u_{L_{NXL,j}} - u_{L_{NXL-1,j}} \\
u_{L_{i,-1}} &= 2u_{L_{i,0}} - u_{L_{i,1}} \\
u_{L_{i,NYL+1}} &= 2\underline{\tilde{u}_{Ci,0}} - u_{L_{i,NYL-1}} \\
v_{L_{-1,j}} &= 2v_{L_{0,j}} - v_{L_{1,j}} \\
v_{L_{NXL+1,j}} &= 2v_{L_{NXL,j}} - v_{L_{NXL-1,j}} \\
v_{L_{i,-1}} &= 2v_{L_{i,0}} - v_{L_{i,1}} \\
v_{L_{i,NYL+1}} &= 2v_{L_{i,NYL}} - v_{L_{i,NYL-1}} \\
\phi_{L_{-1,j}} &= 2\phi_{L_{0,j}} - \phi_{L_{1,j}} \\
\phi_{L_{NXL+1,j}} &= 2\phi_{L_{NXL,j}} - \phi_{L_{NXL-1,j}} \\
\phi_{L_{i,-1}} &= 2\phi_{L_{i,0}} - \phi_{L_{i,1}} \\
\phi_{L_{i,NYL+1}} &= 2\phi_{L_{i,NYL}} - \phi_{L_{i,NYL-1}}
\end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

中央切比雪夫配置法子定義域之開放式邊界條件與固體邊界條件分別爲

$$\left.\begin{aligned}
u_{C_{i,0}} &= \underline{\tilde{u}_{Li,NYL}} \\
u_{C_{i,NYC}} &= \underline{\tilde{u}_{Ri,0}} \\
v_{C_{0,j}} &= 0 \\
v_{C_{NXC,j}} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

右側二階中差分法子定義域藉由沉浸邊界法所給定之沉浸邊界條件則爲

$$\left.\begin{aligned}
u_{R_{-1,j}} &= 2u_{R_{0,j}} - u_{R_{1,j}} \\
u_{R_{NXR+1,j}} &= 2u_{R_{NXR,j}} - u_{R_{NXR-1,j}} \\
u_{R_{i,-1}} &= 2\underline{\tilde{u}_{Ci,NYC}} - u_{R_{i,1}} \\
u_{R_{i,NYR+1}} &= 2u_{R_{i,NYR}} - u_{R_{i,NYR-1}} \\
v_{R_{-1,j}} &= 2v_{R_{0,j}} - v_{R_{1,j}} \\
v_{R_{NXR+1,j}} &= 2v_{R_{NXR,j}} - v_{R_{NXR-1,j}} \\
v_{R_{i,-1}} &= 2v_{R_{i,0}} - v_{R_{i,1}} \\
v_{R_{i,NYR+1}} &= 2v_{R_{i,NYR}} - v_{R_{i,NYR-1}} \\
\phi_{R_{-1,j}} &= 2\phi_{R_{0,j}} - \phi_{R_{1,j}} \\
\phi_{R_{NXR+1,j}} &= 2\phi_{R_{NXR,j}} - \phi_{R_{NXR-1,j}} \\
\phi_{R_{i,-1}} &= 2\phi_{R_{i,0}} - \phi_{R_{i,1}} \\
\phi_{R_{i,NYR+1}} &= 2\phi_{R_{i,NYR}} - \phi_{R_{i,NYR-1}}
\end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

受限於子定義域間網格點空間解析度之差異, 子定義域間於合併邊界處之離散網格點無法完全重疊, 故進行雙向邊界條件交換 (Two-way embedding algorithms) 時

需仰賴內差的使用; 然而, 內差是於一定區間中藉由連續的數學概念所得到之近似函數值, 與各子定義域間各網格點之離散函數值理念相互牴觸, 故直接使用 (3.22) 至 (3.24) 給定邊界條件將造成子定義域間交界處質量通量不連續, 導致耦合定義域產生數值不連續進而影響積分預報的穩定性。爲抑制此不連續的產生, 我們仿照 Debreu et al. (2008) 的技巧, 藉由調整各子定義域於合併邊界處之速度場量值以控制子定義域間質量通量量值一致, 使得各子定義域間質量通量得以守恆。若以 Δy 表示南北向網格間距, $h_{i,j} = \frac{\phi_{i,j}}{g} + H_0$ 表示網格點水面絕對高度, 則考慮水深效應之質量通量量值爲

$$f_{i,j} = \frac{(u_{i,j} + u_{i+1,j}) \cdot (h_{i,j} + h_{i+1,j}) \cdot \Delta y}{4} \tag{3.25}$$

藉由 (3.25) , 各子定義域之邊界面質量通量可表示爲

$$F_j = \sum_{i=0}^{NX-1} f_{i,j} = \frac{\Delta y}{4} \sum_{i=0}^{NX-1} (u_{i,j} + u_{i+1,j}) \cdot (h_{i,j} + h_{i+1,j}) \tag{3.26}$$

故考慮質量通量修正後的速度場 $u'_{i,j}$ 可表示爲

$$\left.\begin{aligned}
&u'_{0,j} = u_{0,j} \\
&u'_{1,j} = u_{1,j} + \tfrac{4\Delta}{NX \cdot \Delta y \cdot (h_{0,j} + h_{1,j})} \\
&u'_{i,j} = u_{i,j} + \tfrac{4\Delta}{NX \cdot \Delta y \cdot (h_{i,j} + h_{i-1,j})} - (u'_{i-1,j} - u_{i-1,j}),\ {\scriptstyle i=2\sim NX-2} \\
&u'_{NX-1,j} = u_{NX-1,j} + \tfrac{4\Delta}{NX \cdot \Delta y \cdot (h_{NX-1,j} + h_{NX,j})} \\
&u'_{NX,j} = u_{NX,j}
\end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

其中 Δ 表示子定義域交界面質量通量差值, 且由於 $(0, j)$ 與 (NX, j) 兩點於不同子定義域中完全重疊, 無需藉由內差方法給定函數值, 故不需藉由調整速度場進行質量通量之修正。

實際模擬中, 我們於左右兩側二階中差分法子定義域以 (3.18) 做爲控制方程進行模擬, 中央切比雪夫配置法子定義域則以 (3.17) 做爲控制方程計算; 各子定義域之時間積分皆使用四階容庫法進行, 積分時步爲1秒, 於各時步預報後分別利用 (3.22) 至 (3.24) 給定各子定義域邊界條件, 且於兩側二階中差分法子定義域邊界藉由 (3.27) 修正合併邊界面之速度場量值, 使得子定義域間質量通量得以守恆, 以整合兩種數值方法。但強制調整質量通量差值仍無法完全抑制子定義域間數值方法不一致產生的數值不連續, 耦合模式穩定積分因此而受限於105小時, 此後將於合併邊界面產生誤差累積導致耦合模式尚無法穩定運作得到近似穩定解。

3.4 二維正壓非線性輻散模式

3.4.1 二維非線性淺水方程

考慮非線性渦度平流效應的二維非線性淺水方程式爲

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - fv &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} - Ku + A\nabla^2 u + \tau_x \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + fu &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} - Kv + A\nabla^2 v + \tau_y \\
\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} &= -(\bar{\phi} + \phi)(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

即水平加速度來自非線性平流作用、科氏力、壓力梯度力、底部摩擦力、側邊摩擦力以及海表風應力, 重力位高度則因非線性平流作用以及速度場之輻合輻散而變化。在此我們仿照二維線性淺水方程的模式參數設定 (表1) , 且同樣假設風應力僅爲緯度的函數, 利用餘弦函數 $\tau = \tau_x(y) = -\tau_0 \cos(\frac{\pi y}{W})$ 設計低緯東風中緯西風的理想大氣風場。模式初始時同樣僅由風應力所驅動, 由初始條件 $u(x,y,0) = v(x,y,0) = \phi(x,y,0) = 0$ 開始積分, 積分達15日後得到近似穩定解。

3.4.2 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件

研究中藉由 (3.16) 定義兩度空間中切比雪夫配置點座標以設計模式網格點位置, 並以二維波譜轉換對公式 (3.15) 進行波譜空間與物理空間相互轉換; 若以上標 (p,0) 與 (0,q) 分別表示空間中東西向 p 次偏微分與南北向 q 次偏微分, 下標 ij 表示配置點座標 (x_i, y_j) , 則於空間微分中利用切比雪夫配置法計算的 (3.28) 可表示爲

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_{ij}\bar{u}_{ij}^{(1,0)} + \bar{v}_{ij}\bar{u}_{ij}^{(0,1)} - f_{ij}\bar{v}_{ij} &= -\bar{\phi}_{ij}^{(1,0)} - K\bar{u}_{ij} + A\bar{u}_{ij}^{(2,2)} + \tau_{ij} \\
\frac{\partial \bar{v}_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_{ij}\bar{v}_{ij}^{(1,0)} + \bar{v}_{ij}\bar{v}_{ij}^{(0,1)} + f_{ij}\bar{u}_{ij} &= -\bar{\phi}_{ij}^{(0,1)} - K\bar{v}_{ij} + A\bar{v}_{ij}^{(2,2)} \\
\frac{\partial \bar{\phi}_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_{ij}\bar{\phi}_{ij}^{(1,0)} + \bar{v}_{ij}\bar{\phi}_{ij}^{(0,1)} &= -(\bar{\phi} + \bar{\phi}_{ij})(\bar{u}_{ij}^{(1,0)} + \bar{v}_{ij}^{(0,1)})
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

模式中利用 (3.29) 做爲控制方程, 於模式東西向及南北向各別設置72個切比雪夫配置點進行模擬 (M = N = 72) 。模式初始條件爲 $u(x,y,0) = v(x,y,0) = \phi(x,y,0) = 0$, 於空間微分計算時, 首先逆操作 (3.15) 以得到波譜係數, 於波譜空間中利用 (2.21) 進行微分運算, 最後再將結果藉由 (3.15) 自波譜空間轉換回物理

空間即爲一次二維切比雪夫配置法運算; 搭配上四階容庫法做爲時間積分計算, 積分時步爲10秒, 於各時步積分預報後利用 $u(0,y,t)=v(W,y,t)=0$ 與 $v(x,0,t)=v(x,W,t)=0$ 給訂固體邊界條件, 積分至15日得到近似穩定解。

3.4.3 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法

我們於兩度中間中利用Arakawa A-grid 做爲離散網格點格式, 以行 (Column) 方向爲東西向, 列 (Row) 方向爲南北向, 於每一個網格點上皆進行 u 、v 與 ϕ 的預報, 如圖11所示; 若以 Δx 與 Δy 分別表示模式中東西向與南北向網格間距, 下標 i,j 表示模式網格點座標 (x_i,y_j) , 則於空間微分中利用二階中差分法運算的 (3.28) 離散形式可表示爲

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_{ij}}{\partial t} &= -u_{i,j}\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2\Delta x} - v_{i,j}\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2\Delta y} + f_{ij}v_{ij} - \frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i-1,j}}{2\Delta x} - Ku_{ij} \\
&\quad + A\left(\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right) + \tau_{i,j} \\
\frac{\partial v_{ij}}{\partial t} &= -u_{i,j}\frac{v_{i+1,j}-v_{i-1,j}}{2\Delta x} - v_{i,j}\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j-1}}{2\Delta y} - f_{ij}u_{ij} - \frac{\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j-1}}{2\Delta y} - Kv_{ij} \\
&\quad + A\left(\frac{v_{i+1,j}-2v_{i,j}+v_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}-2v_{i,j}+v_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right) \\
\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial t} &= -u_{i,j}\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i-1,j}}{2\Delta x} - v_{i,j}\frac{\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j-1}}{2\Delta y} \\
&\quad - (\bar{\phi}+\phi_{i,j})\left(\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}-v_{i,j-1}}{2\Delta y}\right)
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

其中 $i=0,1,..,NX$; $j=0,1,...,NY$; NX 與 NY 分別表示模式於東西向與南北向所使用的網格點數。

模式中利用 (3.30) 做爲控制方程, 於模式東西向及南北向分別使用256個等間距網格點進行模擬 ($NX = NY = 0$) 。模式初始條件爲 $u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = \phi(x, y, 0) = 0$, 以二階中差分法計算空間微分項, 四階容庫法做爲時間積分運算, 積分時步爲10秒, 於各時步積分預報後利用 (3.19) 藉由虛網格沉浸邊界法給定模式邊界條件, 積分至15日得到近似穩定解。

除了單一定義域的模擬外, 我們更將原模式東西向定義域分解爲 $X_L = [0\ \ 2000]$ 公里與 $X_R = [2000\ \ 4000]$ 公里兩部分, 檢驗二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法於分解定義域之使用; 模式網格設計同 3.3.3 所述, 藉由設定左 (L) 右 (R) 兩子定義域於合併邊界處東西向重疊兩個網格點 (一個網格間距) , 子定義域間即可於各時步相互提供邊界條件。模式中兩子定義域皆利用 (3.30) 做爲控制方程, 初始條件分別爲 $u_L(x, y, 0) = v_L(x, y, 0) = \phi_L(x, y, 0) = 0$ 與 $u_R(x, y, 0) = v_R(x, y, 0) = \phi_R(x, y, 0) = 0$, 於模式左 (右) 子定義域之東西向與南北向個別使用128 (129) 與 256 (256) 個等間距網格點進行模擬; 左右兩子定義域之時間積分皆使用四階容庫法進行, 積分時步爲10秒, 每次積分預報後於左右兩子定義域分別使用 (3.20) 與 (3.21) 給定邊界條件, 積分至15日後得近似穩定解。

3.4.4 切比雪夫配置法搭配虛網格沉浸邊界法

爲整合切比雪夫配置法以及虛網格沉浸邊界法, 我們使用與 3.3.4 中相同的網格點配置設計非線性模式中各子定義域之網格點, 將原單一東西向定義域藉由 $X_L =$

[0 1250] 公里、X_C = [1250 2750] 公里以及 X_R = [2750 4000] 公里分爲左邊界 (L)、海洋中央 (C) 以及右邊界 (R) 等三份子定義域, 並在左邊界與右邊界兩子定義域中利用 (3.30) 做爲控制方程, 以虛網格沉浸邊界法處理海洋東西之大陸邊界條件; 而在海洋中央子定義域中使用 (3.28) 做爲控制方程, 在海洋中心藉由切比雪夫配置法有效且精確的模擬海洋流體運動。

實際模擬中使用四階容庫法計算模式時間積分, 積分時步爲1秒, 於各時步積分預報後分別藉由 (3.22) 至 (3.24) 分別給定左邊界 (L) 、海洋中央 (C) 與右邊界 (R) 三子定義域之邊界條件, 並利用 (3.27) 修正各子定義域間質量通量差值, 藉以抑制開放式邊界條件中因網格點空間解析度差異所導致質量通量不連續現象之生成; 然而, 耦合邊界面處之誤差累積最終亦將導致子定義域間質量通量產生不連續, 故耦合模式穩定積分時間仍受限於105小時, 尚無法穩定積分至近似穩定解。

第 4 章

實驗結果

4.1 一維非線性史托梅爾模式

在一維非線性史托梅爾模式中, 我們首先忽略非線性項, 進行模式穩定解對於參數ε的敏感性測試, 結果如圖15所示; 故可發現參數ε越大時西方邊界流無因次寬度越大, 且西方邊界流強度 ($\frac{\partial \psi^*}{\partial x^*}$) 亦較弱。爲吻合觀測中窄且強的西方邊界流, 我們在模式中將選用 $\varepsilon = 0.025$ 進行模擬, 並同樣忽略非線性項之作用, 分別比較切比雪夫配置法搭配固體邊界條件與二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法模擬結果之差異, 如圖16所示; 故可發現兩種數值方法皆可有效且一致的計算模式穩定解。

由於模式在無平均流的穩定態中具有解析解 (3.8) , 故我們可藉解析解計算切比雪夫配置法搭配固體邊界條件與二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法於不同模式空間解析度下的方均根誤差, 藉此比較各種數值方法在使用上的精確度, 如圖17所示; 故可發現切比雪夫配置法具有指數收斂的性質, 在模式中使用32個切比雪夫配置點後即收斂至機器精確度 (Machine accuracy) , 收斂速度遠較二階中差分法

於各種邊界條件的使用快速, 在計算上有效且精確。除此之外, 我們亦藉由二階中差分法的使用, 仔細比較因邊界條件給定方法不同所導致模式收斂速度之差異, 如圖18所示; 故可發現對稱虛網格點的使用計算精確度雖較固體邊界條件差, 但仍保有二階收斂速度, 而非對稱虛網格點的使用則於精確度與收斂速度兩者的表現皆較差, 顯示複雜邊界下須使用高階內差方法給定虛網格點函數值, 以維繫數值方法之精確度。

檢視完線性動力機制後, 我們假設平均流 (U_i) 爲常數, 於模式中加入非線性項進行模擬, 空間微分項以切比雪夫配置法搭配固體邊界條件計算, 藉由比較不同平均流下模式穩定解的差異, 我們可定性地了解非線性動力於海洋物理中所扮演的角色, 結果如圖19所示; 故可發現非線性項對於西方邊界層的寬度與強度均有顯著的影響, 平均流向東時非線性項作用將使西方邊界流強度減弱、區域拓寬, 反之, 向西的平均流則會使西方邊界流強度增強、區域縮小。故我們可發現非線性項的作用在於海洋中能量的重新分配, 其存在將使海洋能量由平均流向西處往平均流向東處傳遞, 對於西方邊界流是個亦敵亦友的角色。

最後, 我們再次忽略非線性項之作用, 並藉由分解定義域的方式將切比雪夫配置法與沉浸邊界法進行整合, 結果如圖20所示; 故可發現兩種數值方法藉由分解定義域的方式整合後之模擬結果與單一定義域之模擬結果 (圖16) 具有一致性。因此, 在子定義域間合併邊界處之交錯網格點配置完全重疊無空間解析度差異的前提下, 分解定義域的方法不僅適用於 Kuo et al. (2010) 所提出的切比雪夫配置法之間, 更

可有效應用於切比雪夫配置法與沉浸邊界法之整合; 故模式子定義域間在適當的網格點配置下將可使用沉浸邊界法處理複雜邊界問題, 並藉由開放式邊界條件搭配切比雪夫配置法於模式邊界層以外的區域進行迅速且精確的模擬。

4.2 二維線性正壓輻散模式

建立在二維線性淺水方程架構下, 我們利用切比雪夫配置法搭配固體邊界條件進行空間微分的計算, 在東西以及南北方向分別使用了72個切比雪夫配置點, 時間積分使用四階容庫法積分至15天達到近似穩定解, 穩定態之東西向速度場、南北向速度場以及重力位高度場分別如圖21至圖23所示。由圖21, 我們可清楚地發現東西向速度場以半縱軸處爲對稱軸, 呈現南北反對稱的分佈形態, 半縱軸以北爲正 (向東) 以南爲負 (向西) , 且兩處運動量值相當。由圖22, 可發現洋中僅於靠近西邊界處有顯著地向北運動, 其速度量值遠較海洋其餘各處之向南運動爲快, 且西方邊界流區域之南北向速度場亦以半縱軸處爲對稱軸呈現南北對稱的分佈情形; 此外, 向北運動極大值位於邊界上則是由於固體邊界條件僅限制縱軸上東西向速度場爲零的緣故。最後, 圖23顯示重力位高度場呈現西高東低的分佈情形, 海洋質量集中於西側; 且同樣以半縱軸爲對稱軸, 呈現南北對稱的趨勢, 與 Bryan (1963) 利用無因次方程式所做的模擬定性上相同。

建立在相同的模式參數設計下, 我們亦利用二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法進行空間微分的計算, 於東西與南北方向分別使用了256個等間距網格點, 時間

積分使用四階容庫法積分至15天達到近似穩定解, 穩定態之東西向速度場、南北向速度場以及重力位高度場分別如圖24至圖26所示。與圖21至圖23比較後, 可清楚地發現模擬結果與先前利用切比雪夫配置法搭配固體邊界條件之結果具一致性; 東西向速度場同樣以半縱軸爲對稱軸南北反對稱, 重力位高度場則以半縱軸爲對稱軸南北對稱, 呈現西高東低的趨勢, 而我們所關注的南北向速度場極大值亦位於狹窄的西方邊界層內, 以半縱軸處爲對稱軸南北對稱。故可發現切比雪夫配置法搭配固體邊界條件與二階中差分法配合虛網格沉浸邊界法等兩套計算方法均可有效地模擬出海洋中西方邊界流現象, 且模擬結果具有一致性; 然而, 若以計算效率爲考量, 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法在模擬中所需使用的網格點與計算時間皆遠較切比雪夫配置法搭配固體邊界條件爲大, 且模擬結果有較顯著的小幅震盪存在, 顯示精確度較低, 在計算上較沒有效率。即便於計算效率中處於劣勢, 二階中差分法的使用在邊界上可直接藉由虛網格沉浸邊界法間接給定模式邊界條件, 對於複雜邊界地形邊界條件的處理較切比雪夫配置法容易的多; 因此, 我們希望能藉由分解定義域的方式設計一套新穎的計算方法, 將二階中差分法配合虛網格沉浸邊界法使用於海洋邊界層中以簡化模式邊界條件之處理, 並於邊界層以外之大範圍海洋區域利用切比雪夫配置法進行迅速且精確的計算。

Kuo et al. (2010) 的研究中已成功地將切比雪夫配置法應用於分解定義域中使用, 故在此我們直接檢驗分解定義域藉由二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法之使用, 將原模式定義域於半橫軸處分爲兩個子定義域進行運算, 子定義域於東西

與南北方向分別使用128及256個等間距網格點進行模擬, 兩子定義域於東西方向相互重疊一個網格間距; 時間積分使用四階容庫法積分至15日達近似穩定解, 穩定態之東西向速度場、南北向速度場以及重力位高度場分別如圖27至圖29所示。故可發現藉由分解定義域所得到之模擬結果與單一定義域的模擬結果間具有一致性, 顯示分解定義域亦可成功應用於二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法的使用。

運用分解定義域的方法, 我們將切比雪夫配置法與虛網格沉浸邊界法進行整合; 但與過去分解定義域的使用不同, 子定義域間所使用的數值方法收斂速度有顯著的差異 (圖17) , 若以合併邊界面上切比雪夫南北向配置點座標定義爲二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法子定義域中之南北向網格點位置, 則中差分法將因網格空間解析度過低且不等間距而無法收斂, 故子定義域間於南北方向無法使用相同的網格配置進行計算。反之, 若以二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法子定義域於合併邊界面之南北向網格點座標定義切比雪夫南北向配置點位置; 則於切比雪夫配置法的計算中積分時步須受限於更爲嚴格的 CFL 條件而縮短, 且無法使用快速轉換增進計算效率, 與原先欲加速海洋流體的計算之原意相違背。由於合併邊界面南北向網格點將有所差異, 子定義域間相互提供開放式邊界條件需仰賴內差方法計算各網格點之函數值; 然而, 內差的結果建立於數學上的連續性, 與數值模擬中離散性質相牴觸, 粗細解析度間相互交換邊界條件將於數值空間造成重疊面上質量通量不連續。研究結果顯示, 藉由強制調整子定義域合併邊界上函數值以維持子定義域間質量通量量值相同、增大二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法子定義域之大小、減

小切比雪夫配置法中所使用的波數以降低子定義域間數值收斂速度之差異以及提升合併邊界處內差方法之精確度等方法皆可有效抑制耦合模式中數值不連續的產生, 顯著提升耦合模式穩定積分時間。然而, 強制調整函數值使合併邊界處質量通量守恆將導致合併邊界處函數值無法守衡, 進而於合併邊界面上產生誤差累積, 最終仍有數值不連續產生, 如圖30所示。我們利用耦合模式穩定積分105小時, 結果如圖31至圖33所示; 故可發現東西向速度場仍以半縱軸爲對稱軸南北反對稱, 南北向速度場與重力位高度場則以半縱軸爲對稱軸南北對稱, 且已有顯著的西方邊界流現象產生; 但由於耦合模式有效積分時間尚未足以在西方邊界產生足夠的波動能量累積, 故西方邊界流運動強度不及近似穩定解之強度量值。

4.3 二維非線性正壓輻散模式

利用線性模式中的參數與網格點配置, 我們額外加入非線性項進行模擬, 以探討海洋非線性動力; 在切比雪夫配置法搭配固體邊界條件計算空間微分的模擬中, 時間積分使用四階容庫法積分至15日達近似穩定解, 穩定態之東西向速度場、南北向速度場以及重力位高度場分別如圖34至圖36所示。故可發現線性模式模擬結果中以半縱軸處爲對稱軸之對稱性質已不復存在, 加入非線性項後各場量最大值皆有向北方偏移的現象產生; 東西向速度場於模式西北邊界處產生一似噴流結構, 其向東運動速率量值遠大於其餘各處之向西運動速率量值; 南北向速度場雖同樣顯現西方邊界流現象, 但西方邊界流於北方之速度量值較南方爲大, 區域則較小; 最後, 重力位

高度場雖同樣呈現西高東低質量聚集於海洋西側的分佈情形, 但極大值亦有向北延伸的現象產生。這樣的南北不對稱性顯然起因於非線性動力機制, 藉由 4.1 中一維非線性模式的討論, 我們發現非線性動力將使能量由平均流向西處往平均流向東處傳遞, 且在 4.2 的二維線性模式中更可發現半縱軸處以北有向東之平均流, 以南則平均流向西; 總和以上模擬結果可歸納出一有趣的現象, 若於二維模式中加入非線性項一併討論, 則非線性動力將造成半縱軸處以南之能量向北傳遞, 使得海洋原集中於西方之能量有向北延伸的趨勢, 爲圖34至圖36中南北不對稱性的成因。

爲檢驗兩種數值方法之一致性, 我們亦使用二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法進行二維非線性淺水方程之空間微分計算, 時間積分則同樣藉由四階容庫法積分15日達近似穩定解, 穩定態之東西向速度場、南北向速度場以及重力位高度場分別如圖37至圖39所示。故我們可發現兩種不同數值方法的使用皆產生相同的模擬結果, 非線性動力機制將導致海洋中能量由平均流向西處 (半縱軸以南) 往平均流向東處 (半縱軸以北) 傳遞, 使得海洋原集中於西方之能量有向北延伸的趨勢, 造成各場量極大值皆向北方偏移, 爲海洋中南北不對稱性來源; 顯示兩種數值方法間之一致性。

確認兩種數值方法間之一致性後, 我們再次將分解定義域應用於二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法之中, 檢驗其於二維非線性淺水方程之適用性; 使用與二維線性淺水方程中相同的模式參數與網格點設計, 於時間積分上同樣使用四階容庫法積分至15日達近似穩定解, 穩定態之東西向速度場、南北向速度場以及重力位高度

場分別如圖40至圖42所示。故可發現二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法於分解定義域與單一定義域的使用皆得到一致的模擬結果, 顯示於分解定義域中使用二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法亦可成功地應用於二維非線性淺水方程。

最後, 運用分解定義域的方法, 我們將切比雪夫配置法與虛網格沉浸邊界法進行整合; 於海洋中央使用切比雪夫配置法簡化並加速模式計算, 邊界層區域則由虛網格沉浸邊界法給定模式邊界條件。然而, 子定義域間於合併邊界面網格點空間解析度差異過大依舊爲開放式邊界條件帶來挑戰; 我們藉由增大二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法子定義域之大小、減小切比雪夫配置法中所使用的波數以降低子定義域間數值收斂速度之差異、提升合併邊界處內差方法之精確度且於四階容庫法積分預報的每一時步中皆調整子定義域間合併邊界面質量通量量值, 以抑制子定義域間質量通量不連續的產生, 並有效延長耦合模式穩定積分時間, 但最終仍因子定義域間交界面處函數值不守恆導致誤差累積而有數值不連續產生。研究結果顯示, 藉由以上各改進方法修正之二維非線性耦合模式可有效穩定積分至105小時, 結果如圖43至圖45所示。由於非線性動力作用時間尺度大於耦合模式有效積分時間尺度的緣故, 二維非線性耦合模式尚未足以提供海洋中南北之不對稱性, 故模式輸出結果與二維線性耦合模式相仿; 東西向速度場仍以半縱軸爲對稱軸南北反對稱, 南北向速度場雖具西方邊界流特性但強度較近似穩定解爲弱, 重力位高度則同樣呈現西高東低的趨勢。

第 5 章

總結

5.1 結論

切比雪夫配置法與虛網格沉浸邊界法兩者皆爲重要的數值方法, 分別提供了數值模式所需的計算迅速且精確性以及邊界條件的有效處理; 本研究以物理海洋中的經典問題西方邊界流爲例, 首次藉由分解定義域之方式將其進行整合, 企圖提出一套嶄新的計算方法。我們在研究中詳細分析了模式瞬態至穩態之數值解, 提出西方邊界流瞬態之物理機制之闡述, 即海洋東西側強烈不對稱性起因於羅士比波能量傳遞機制於緯向之差異; 波動能量將藉由東西向長波迅速地向西傳遞, 向東方的能量卻僅由東西向短波緩慢地往東傳輸, 羅士比波群速度於東西向傳遞之快慢差異導致波動能量於海洋西方邊界累積, 爲瞬態中西方邊界流之成因。

在一維非線性史托梅爾模式中, 我們藉由調整平均流之量值與方向, 發現非線性動力機制將造成海洋中能量重新分配; 平均流向東時西方邊界流寬度縮短強度增強, 向西時則反之, 故可知海洋中能量將自平均流向西處往向東處傳遞。此外, 我

們更藉由二維線性與非線性淺水方程設計二維線性與非線性正壓輻散模式, 模式輸出之近似穩定解顯示西方邊界流成因僅與羅士比波傳遞機制有關, 無關於非線性動力; 然而, 於模式中加入非線性平流項後將摧毀線性模式中南北方向特有之對稱性值, 故可歸納出與一維非線性史托梅爾模式之定性結果相同的結論, 即非線性動力確實將導致能量由平均流向西處傳往平均流向東處, 造成海洋能量重新分佈, 各場量極大值皆向北方偏移, 產生南北之不對稱性。

藉由比較單一定義域中使用切比雪夫配置法搭配固體邊界條件以及二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法於一維與二維模式之模擬結果, 可清楚地發現兩種數值方法的使用具有一致性; 我們欲利用分解定義域的方式將兩者整合, 於邊界層中使用虛網格沉浸邊界法給定模式邊界條件, 並於子定義域交界面上藉由開放式邊界條件提供切比雪夫配置法適當之邊界條件以更迅速、準確地模擬海洋流體。建立於Kuo et al. (2010) 的工作之上, 本研究顯示子定義域合併邊界面網格點相互重疊時, 不論切比雪夫配置法或虛網格沉浸邊界法均可有效地應用分解定義域的方法提高計算效率; 本研究中成功的將二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法延伸應用於分解定義域的計算中, 有效地模擬二維線性與非線性淺水方程式; 且於一維非線性史托梅爾模式中更成功的藉由分解定義域整合切比雪夫配置法與虛網格沉浸邊界法, 顯示兩種數值方法於合併邊界處處理得當時可有效地進行整合。但在二維模式模擬中, 若將二階中差分法子定義域之網格點配置藉由切比雪夫配置法子定義域配置點設計, 則將因收斂速度過慢而無法收斂; 若將切比雪夫配置法子定義域配置點依照二

階中差分法子定義域網格點設計, 則不但無法使用快速轉換增進計算效率, 且積分步長需滿足 CFL 條件縮小, 與我們欲加速計算海洋流體之原意相違背。故二維模式中, 各子定義域之網格點配置無法於合併邊界處完全吻合, 導致分解定義域的使用無法直接藉由子定義域間相互對應之網格點函數值彼此給定邊界條件, 而需仰賴數值內差以相互給定邊界條件; 但子定義域交界面之空間解析度不同時, 內差方法的使用將造成合併邊界面質量通量不連續, 進而產生數值不連續影響積分穩定性。藉由一系列的數值模擬實驗, 我們發現調降切比雪夫配置法之計算波數以近似子定義域間數值精確度、設定二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法子定義域與切比雪夫配置法子定義域間大小比值爲六分之一以上、提升合併邊界處交換邊界條件之內差精確度等方法皆可有效提升耦合模式穩定積分時間。此外, 我們更參考 Debreu et al. (2008) 的技巧, 利用強制調整合併邊界面之函數值使得子定義域間質量通量達到一致, 以抑制子定義域間因空間解析度差異所引起之質量通量不連續; 這樣強制修正質量通量量值雖可有效延長耦合模式積分時間, 但因調整質量通量後子定義域之函數值將不守恆, 最終導致誤差累積進而產生數值不連續, 限制耦合模式穩定積分時間。雖耦合模式尚無法穩定積分至近似穩定解, 但藉由以上的修正後已可成功模擬出西方邊界流現象, 且模擬結果與單一定義域之瞬態模擬結果一致, 顯示兩種數值方法整合之可行性。

研究結果顯示, 在左、中與右子定義域之東西向大小分別設定爲 [1000 2000 1000] 公里, 並使用 (3.27) 修正子定義域間質量通量差值時, 若將子定義域交界面處所使

用之內差格式由線性內差改善爲三次雲彩線的方法時, 耦合模式穩定積分時間可由32小時提升至55小時; 即高階內差的使用將有效提升耦合模式之穩定積分時間。此外, 利用三次雲彩線給定耦合模式開放式邊界條件, 並使用 (3.27) 修正子定義域間質量通量差值時, 若將左、中與右子定義域之東西向大小由原本的 [1000 2000 1000] 公里更改爲 [1250 1500 1250] 公里時, 耦合模式穩定積分時間更可由55小時延長至105小時; 顯示二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法子定義域與切比雪夫配置法子定義域間大小比值差異亦將影響耦合模式之穩定積分時間。

5.2 未來展望

進一步的研究首先將著重於有效延長耦合模式穩定積分時間, 首要解決的課題將是子定義域解析度差異過大之挑戰, 由於強制調整質量通量仍無法有效抑制數值不連續的產生, 我們預計從子定義域合併邊界面之控制方程著手, 由耦合模式控制方程式中找尋子定義域間之一致性, 如 (5.1) 所示

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_{mn}}{\partial t} &= f_{mn}\bar{v}_{mn} - \bar{\phi}_{mn}^{(1,0)} - K\bar{u}_{mn} + A\bar{u}_{mn}^{(2,2)} + \tau_{mn} \\ &= f_{ij}v_{ij} - \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x} - Ku_{ij} + \tau_{i,j} \\ &\quad + A(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2})\end{aligned} \tag{5.1}$$

其中下標 i, j 與 m, n 分別表示切比雪夫配置法子定義域與二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法子定義域之網格點座標。若可由離散之控制方程中建立子定義域間之一致性, 則即便子定義域間使用不同的數值方法與網格點配置仍描繪相同唯一

的函數, 故可避免數值不連續的產生, 使得耦合模式可延長穩定積分時間。

一旦子定義域交界面之開放式邊界條件可穩定運行, 我們將增加模式邊界之複雜度, 引入眞實海洋中大陸邊界地形進行模擬, 以發揮虛網格沉浸邊界法於計算中最爲強大的優點; 待耦合模式穩定運行後, 將測試平行化計算的使用對於模式計算效率的提升。最後, 我們希望能將此海洋耦合模式與大氣場做整合, 以建立一套有效率的海氣耦合模式。

參考文獻

Bryan, K., 1963: A numerical investigation of a nonlinear model of a wind-driven ocean. *J. Atmos. Sci.,* **20,** 594–606.

Cailleau, S., V. Fedorenko, B. Barnier, E. Blayo, and L. Debreu, 2008: Comparison of different numerical methods used to handle the open boundary of a regional ocean circulation model of the Bay of Biscay. *Ocean Modeling,* **25,** 1–16.

Chelton, D. B., and M. G. Schlax, 1996: Global Observations of Oceanic Rossby Waves. *Science,* **272,** 234–238.

Debreu L., and E. Blayo, 2008: Two-way embedding algorithms: a review. *Ocean Dynamics,* **58,** 415–428.

Fulton, S. R., and W. H. Schubert, 1987a: Chebyshev spectral methods for limited-area models.part I: model problem analysis. *Mon. Wea. Rev.,* **115,** 1940–1953.

Fulton, S. R., and W. H. Schubert, 1987b: Chebyshev spectral methods for limited-area models.part II: shallow water model. *Mon. Wea. Rev.,* **115,** 1954–1965.

Haltiner, G. H., and R. T. Williams, 1980: *Numerical prediction and dynamic meteorology.* Wiley press, 477 pp.

Kuo, H. C., Y. C. Chang, Y. M. Tsai, Y. H. Tseng, and M. C. Lai, 2010: A new parallel domain-decomposed Chebyshev collocation method for atmospheric modeling. *Mon. Wea. Rev.,* **In preparation.**

Kuo, H. C., and R. T. Williams, 1990: Semi-Lagrangian solutions to the inviscid Burgers equation. *Mon. Wea. Rev.,* **118,** 1278-1288.

McWilliams, J. C., 2006: *Fundamentals of Geophysical Fluid Dynamics.* Cambridge press, 249 pp.

Mittal, R., and G. Iaccarino, 2005: Immersed boundary method. *Annu. Rev. Fluid Mech.,* **37,** 239–261.

Pedlosky J., 1987: *Geophysical Fluid Dynamics.* Springer press, 709 pp.

Pond, D. P., and G. L. Pickard, 1983: *Introductory Dynamical Oceanography.* Pergamon press, 329pp.

Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, 1992: *Numerical Recipes in Fortran.* Cambridge press, 963 pp.

Tseng, Y. H., J. H. Ferziger, 2003: A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *J. Comput. Phys.,* **192,** 593–623.

Vallis, G. K., 2006: *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics.* Cambridge press, 745 pp.

表

符號	意義	數值	單位
f	科氏參數	$4 \cdot 10^{-4}$	$\frac{1}{s}$
g	重力加速度	9.8	$\frac{m}{s^2}$
β	行星渦度梯度	$2 \cdot 10^{-11}$	$\frac{m}{s}$
τ_0	海表風應力	1	$\frac{N}{m^2}$
H	混和層平均深度	$2 \cdot 10^2$	m
H_0	海洋平均深度	$4 \cdot 10^3$	m
ρ_0	海洋密度	1013	$\frac{kg}{m^3}$
$\bar{\phi}$	重力波波速平方	$4 \cdot 10^4$	$(\frac{m}{s})^2$
K	底部摩擦力參數	10^{-6}	$\frac{1}{s}$
A	側邊摩擦力參數	10^2	$\frac{m^2}{s}$
W	模式定義域寬度	$4 \cdot 10^6$	m
u	東西向速度場	–	$\frac{m}{s}$
v	南北向速度場	–	$\frac{m}{s}$
ϕ	重力位高度場	–	$(\frac{m}{s})^2$

表 1: 模式符號列表

圖

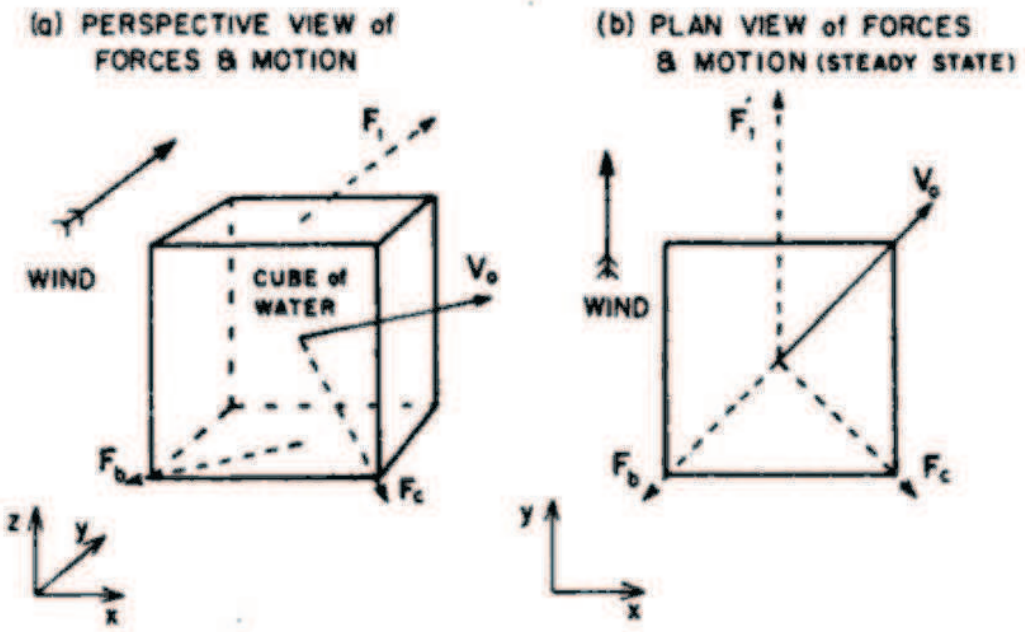

圖 1: Nansen的定性理論示意圖。圖 (a) 顯示表層受到風應力 (F_t) 驅動的立方塊開始運動後將受到科氏力 (F_c) 以及底部摩擦力 (F_b) 的影響。圖 (b) 爲穩態時俯視圖, 顯示三力平衡以及立方塊運動方向。(摘自 Pond and Pickard, 1983)

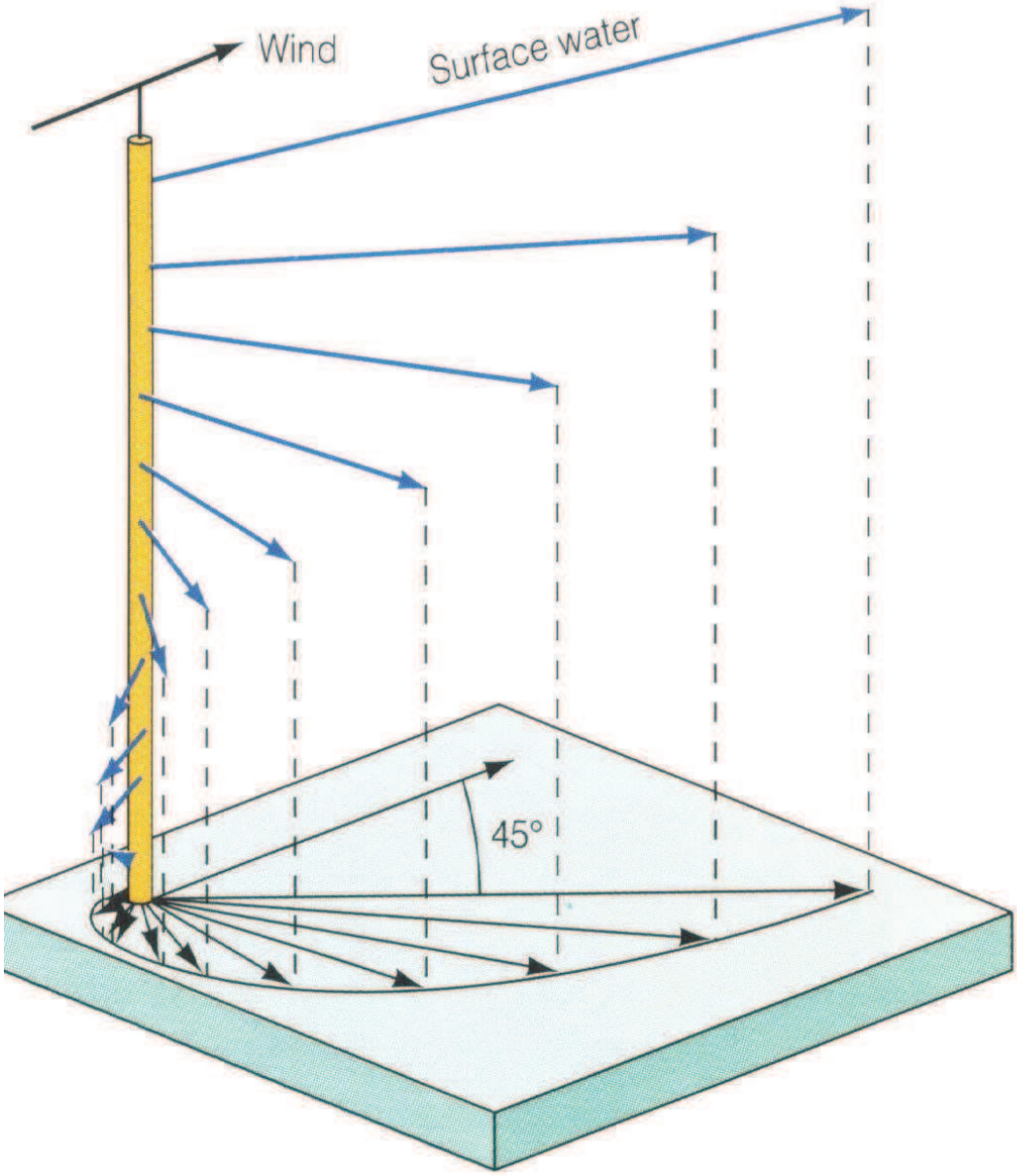

圖 2: 艾克曼螺旋示意圖。可發現洋流速度在洋面最快, 並向下成螺旋形遞減, 淨值量向右傳送(北半球)。(摘自Garrison, 1993)

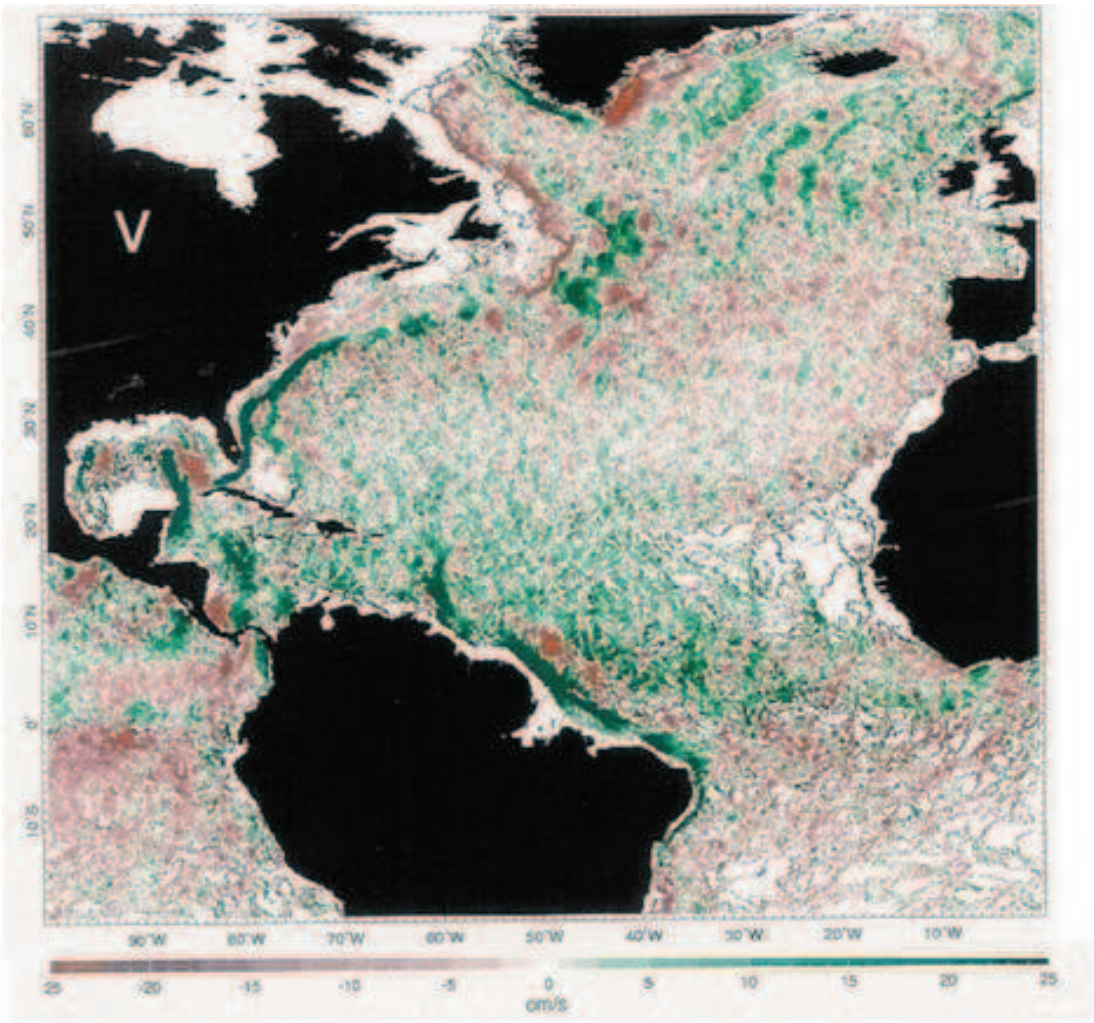

圖 3: 衛星觀測的海洋經向速度場, 綠色爲速度正值(向北), 紅色爲速度負值(向南), 色階越深表示量值越大; 故可發現海洋中僅西方邊界流存在, 其速度量值遠較其餘海洋速度爲大, 快速的向北傳送, 以維持洋流的質量守恆。(摘自Vallis, 2006)

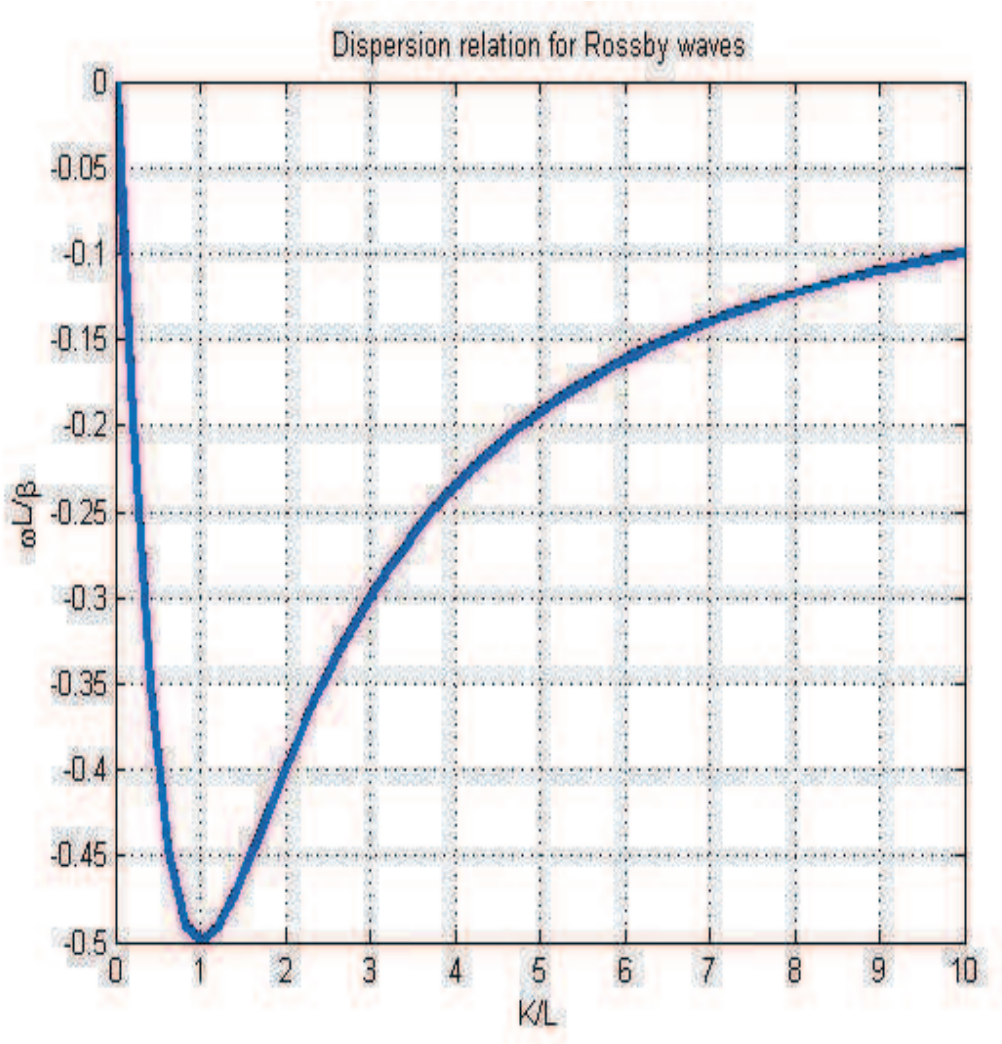

圖 4: 羅士比波頻散關係, 橫軸爲東西向與南北向波數比值, 縱軸爲無因次化的羅士比波頻率; 故可看出長波群速度向西傳遞, 短波群速度則相對較慢的向東傳遞。

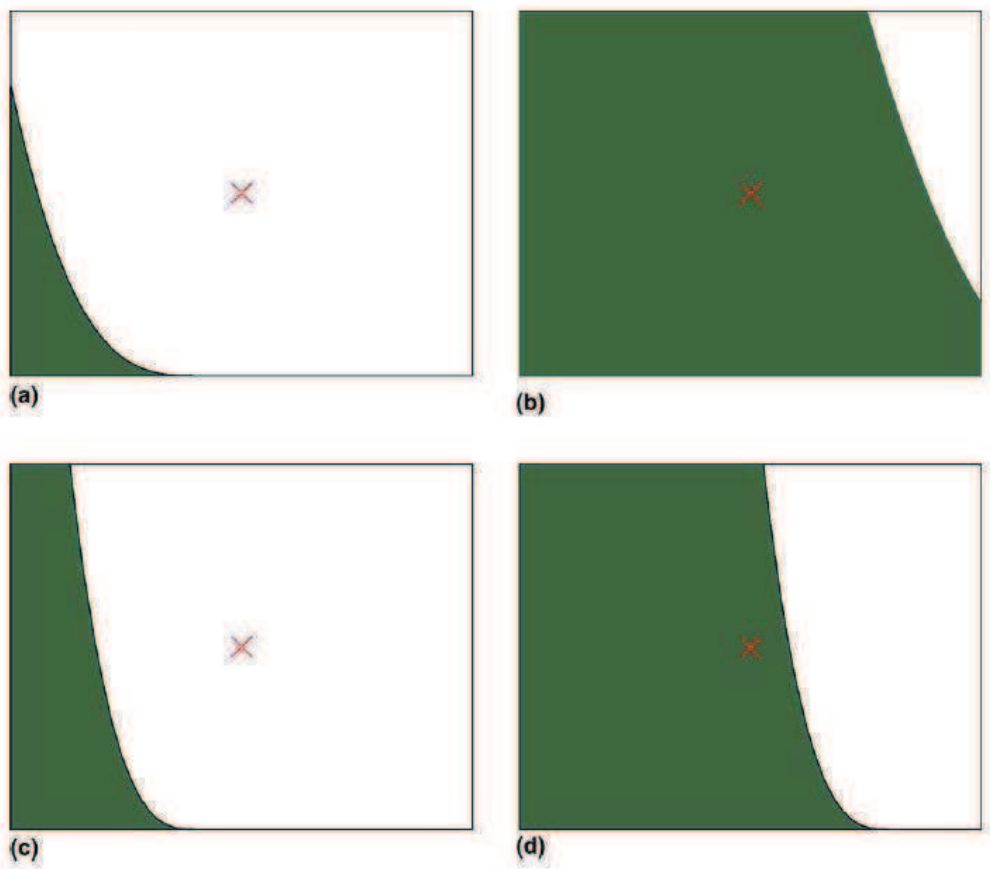

圖 5: 虛網格點示意圖, 色階處爲模式邊界, 叉號爲模式網格點; 若網格點位於邊界以外則爲物理網格點, 如(a)、(c) 所示, 若網格點於邊界內則爲虛網格, 如 (b)、(c) 所示。(摘自 Tseng et al., 2003)

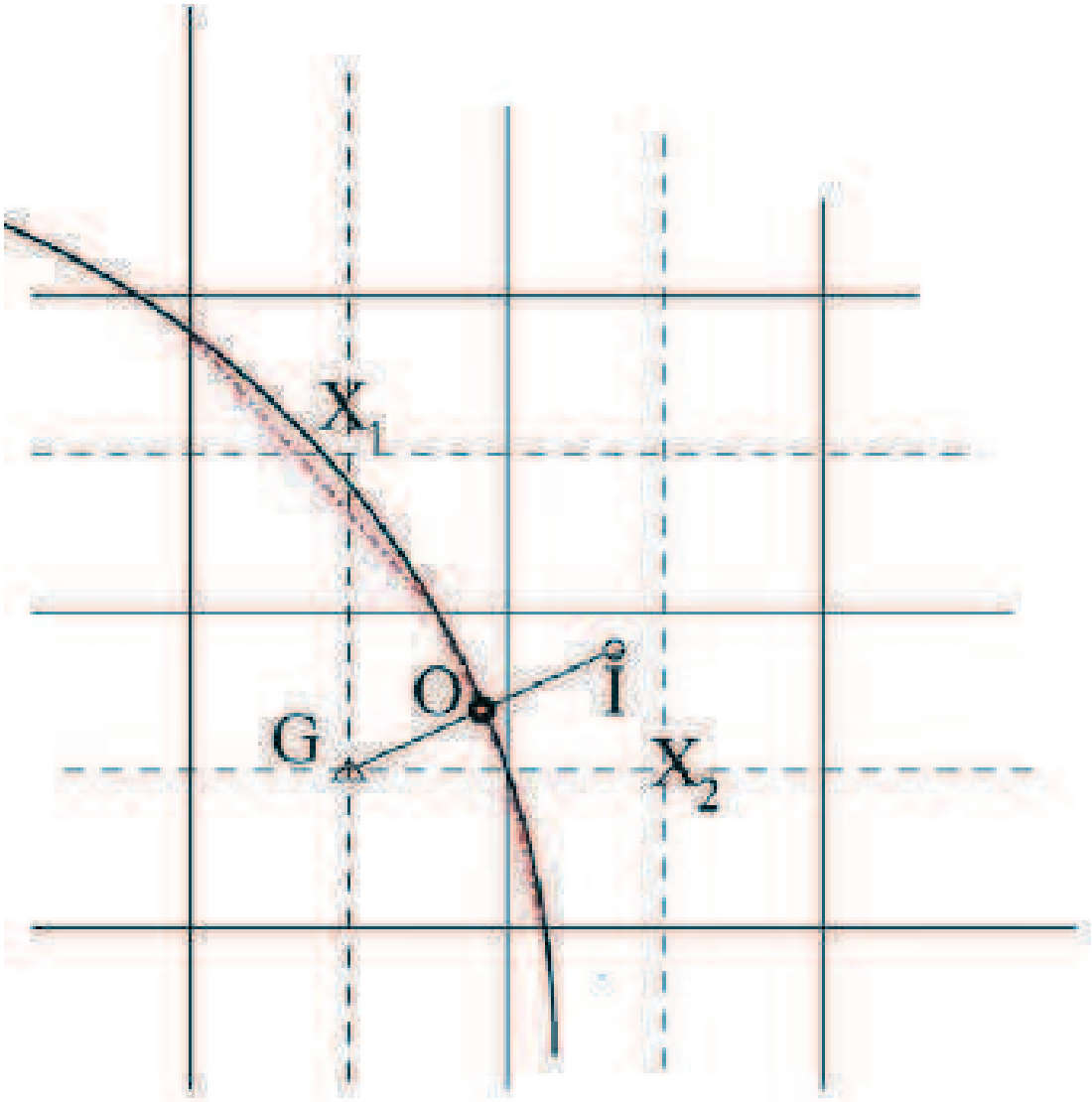

圖 6: 虛網格格點配置示意圖,G爲虛網格點所在,X_1與X_2爲鄰近邊界之流體網格點,O 爲模式邊界,I 爲虛網格點與邊界之對稱點。(摘自 Tseng et al., 2003)

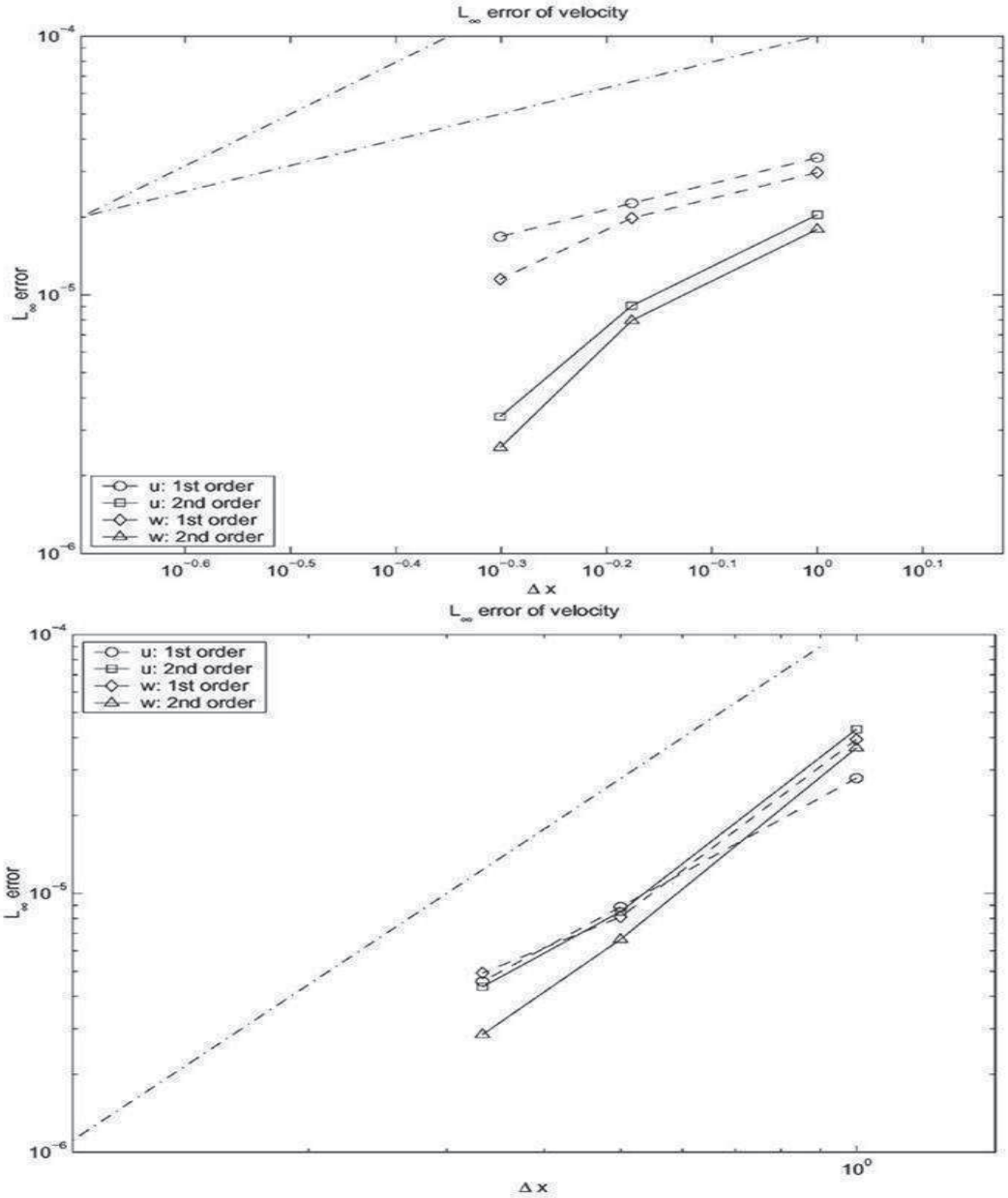

圖 7: 虛網格沉浸邊界法之收斂速度, 橫軸爲網格點間距, 縱軸爲最大誤差值, 虛線與實線分別爲線性內差以及二階內差應用於虛網格函數值之結果。上圖爲模式邊界之收斂速度, 下圖爲模式整體之收斂速度, 可發現二階內差的使用在邊界上較線性內差精確, 但對模式整體之收斂速度並無提升。(摘自Tseng et al., 2003)

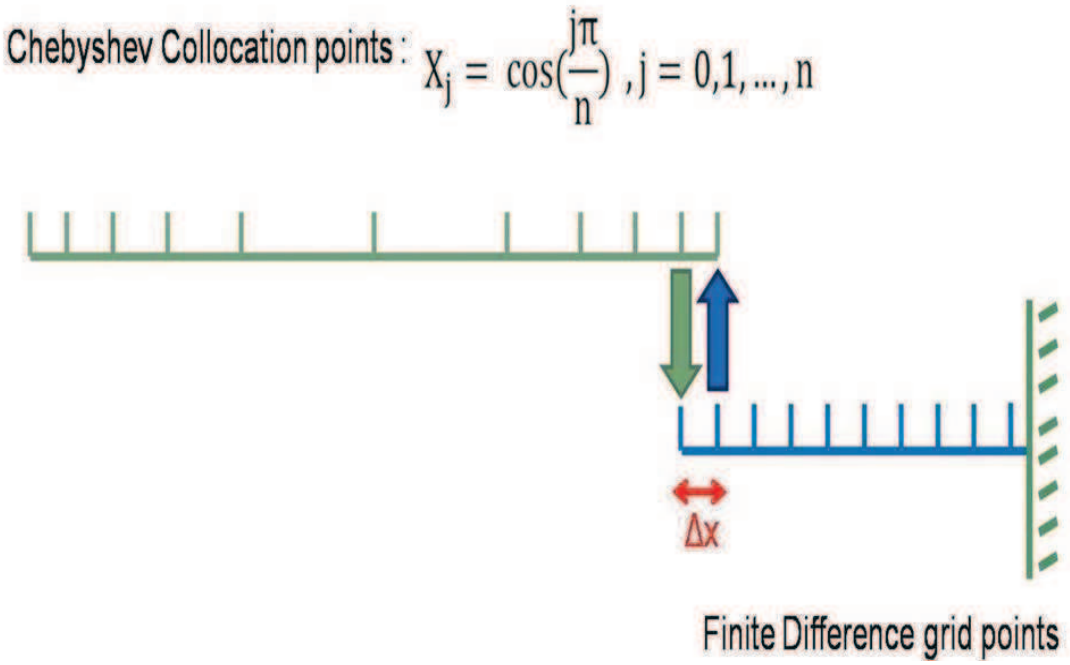

圖 8: 一維耦合模式網格配置示意圖, 上方綠色網格爲切比雪夫配置點, 下方藍色網格爲利用配置點間最小間距爲網格間距之中差分法網格點, 兩者重合兩個網格點以彼此提供邊界條件; 中差分法定義域右邊界爲不等間距網格點, 以虛網格沉浸邊界法給定邊界條件。

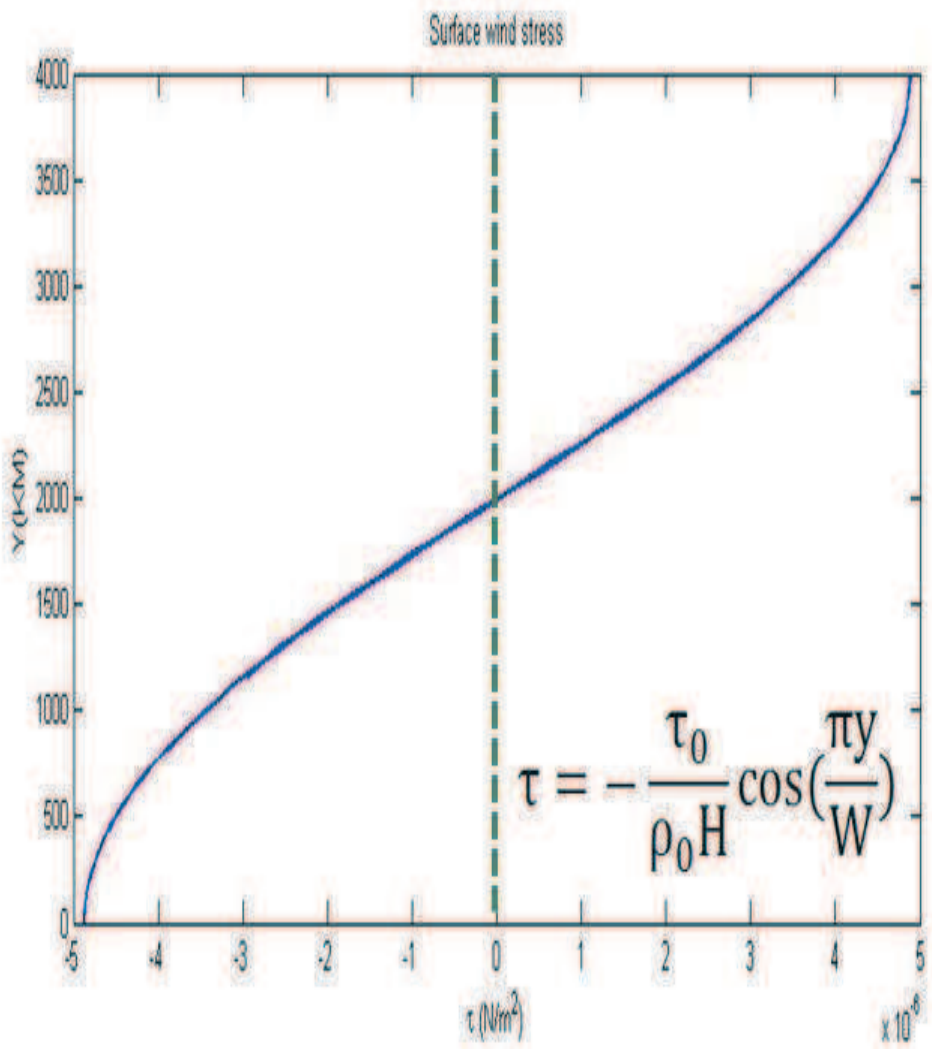

圖 9: 模式海表風應力量值之南北變化, 橫軸爲風應力量值, 縱軸爲模式南北向網格點座標, 藍線爲利用餘弦函數擬合之風應力量值, 綠色虛線處風應力量值爲零。故模式風應力僅與緯度變化有關, 低緯東風 (風應力爲負值) 中緯西風 (風應力爲正值) 。

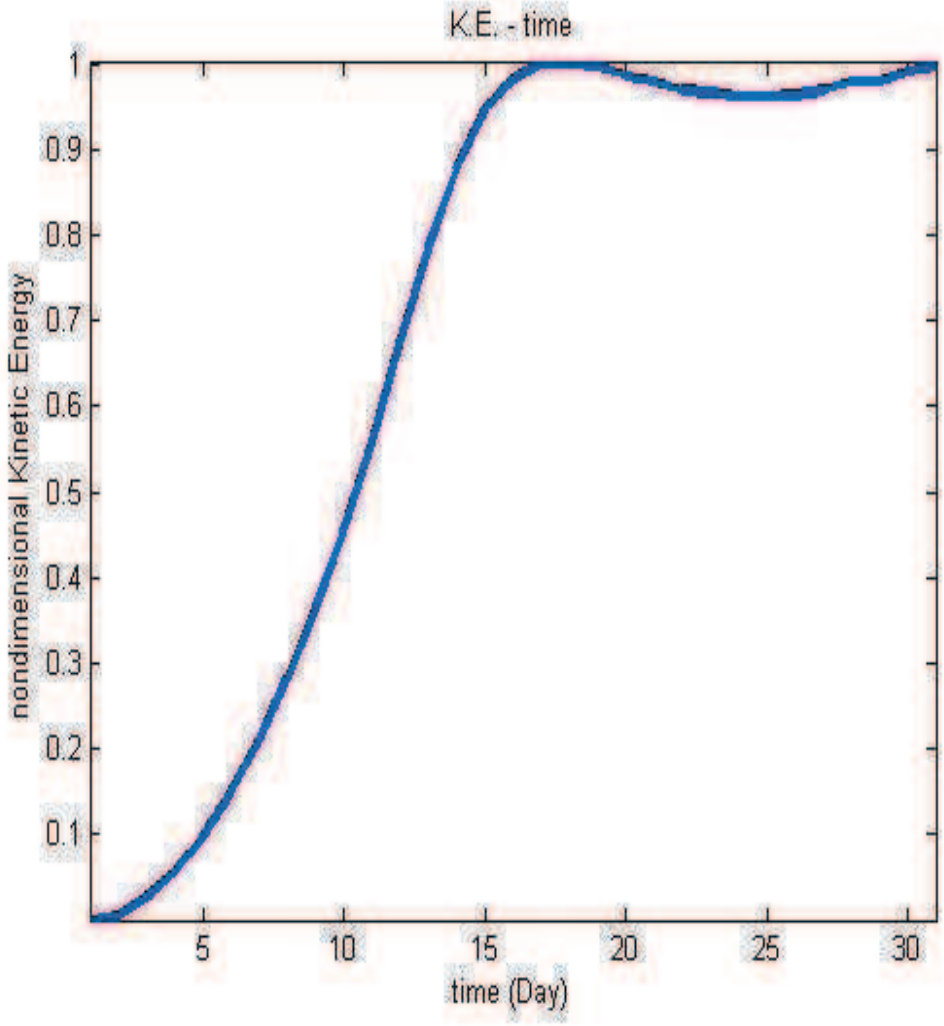

圖 10: 模式無因次動能之時間數列, 橫軸爲模式積分時間, 縱軸爲模式無因次動能; 在此利用時間數列中動能最大值爲基準, 將各時間動能標準化以得到無因次動能。可發現模式約積分15日後無因次動能趨近定值, 到達穩定態。

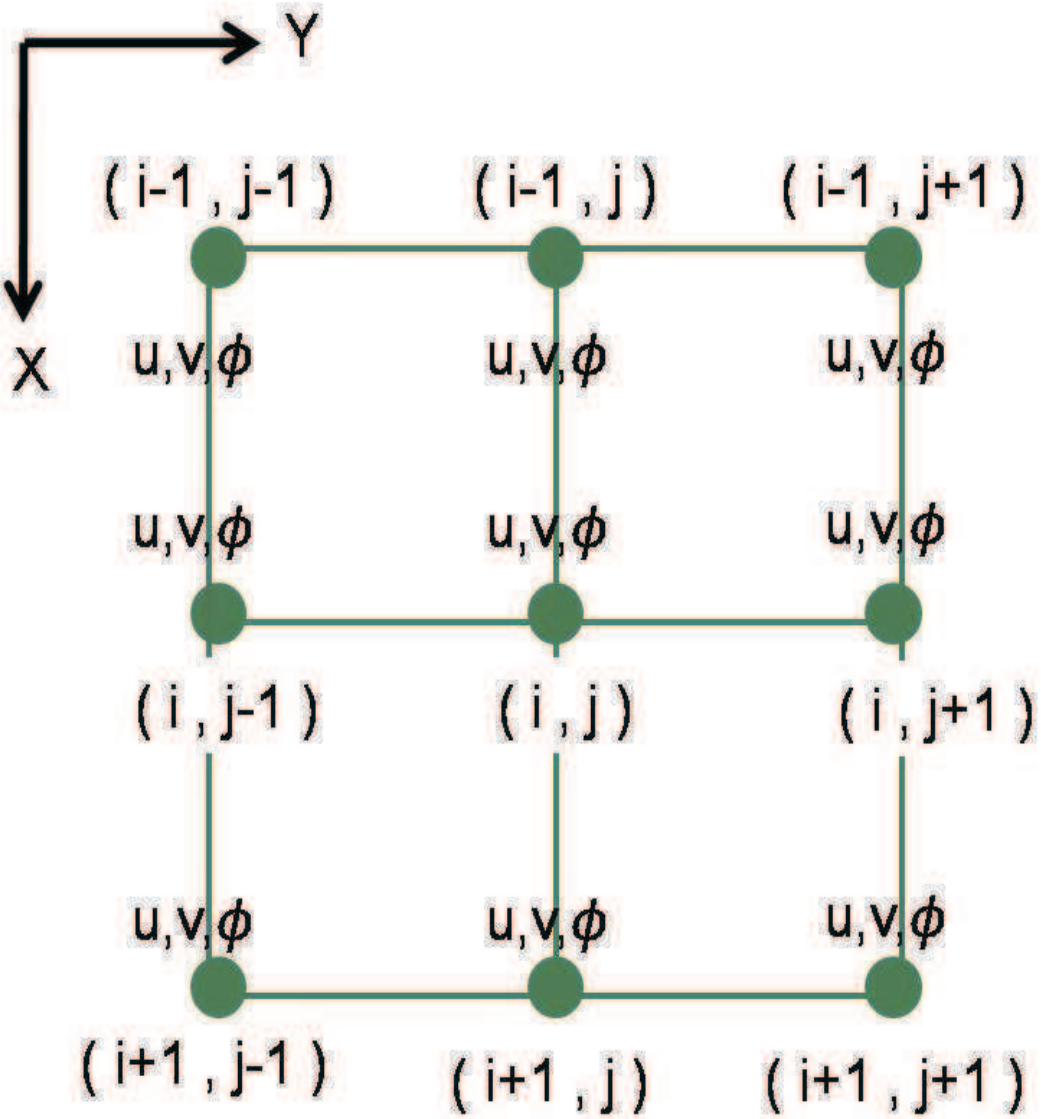

圖 11: Arakawa A-grid 示意圖, 以行表示東西向, 列表示南北向設計模式網格點; 並於矩陣各元素上進行u、v與ϕ的預報。

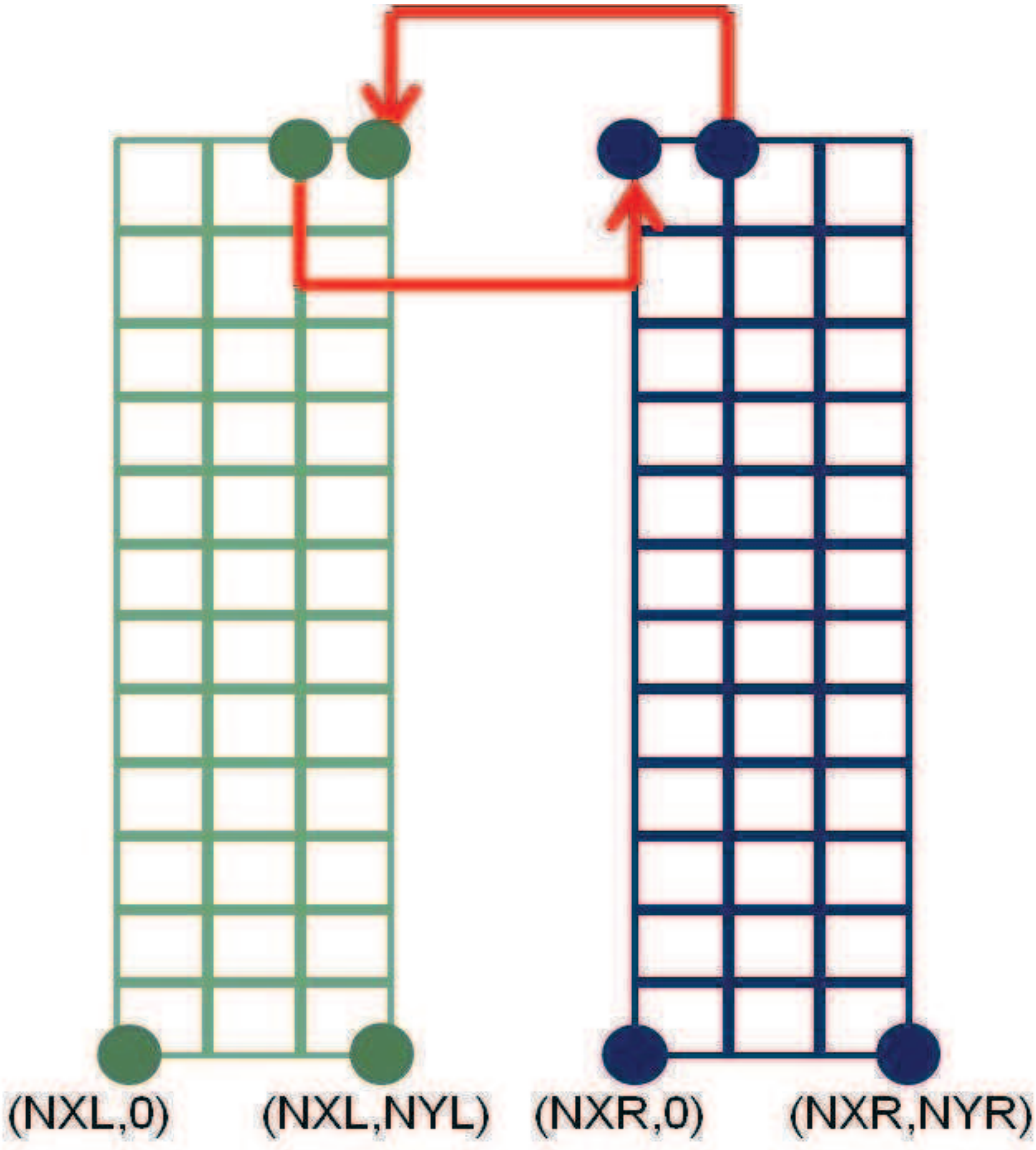

圖 12: 模式網格點配置示意圖; 藉由分解定義域的方式將單一定義域分解爲左右兩子定義域分別進行計算, 並設定兩子定義域間於東西向交錯兩個網格點使其相互給定邊界條件, 如紅色箭頭所示。

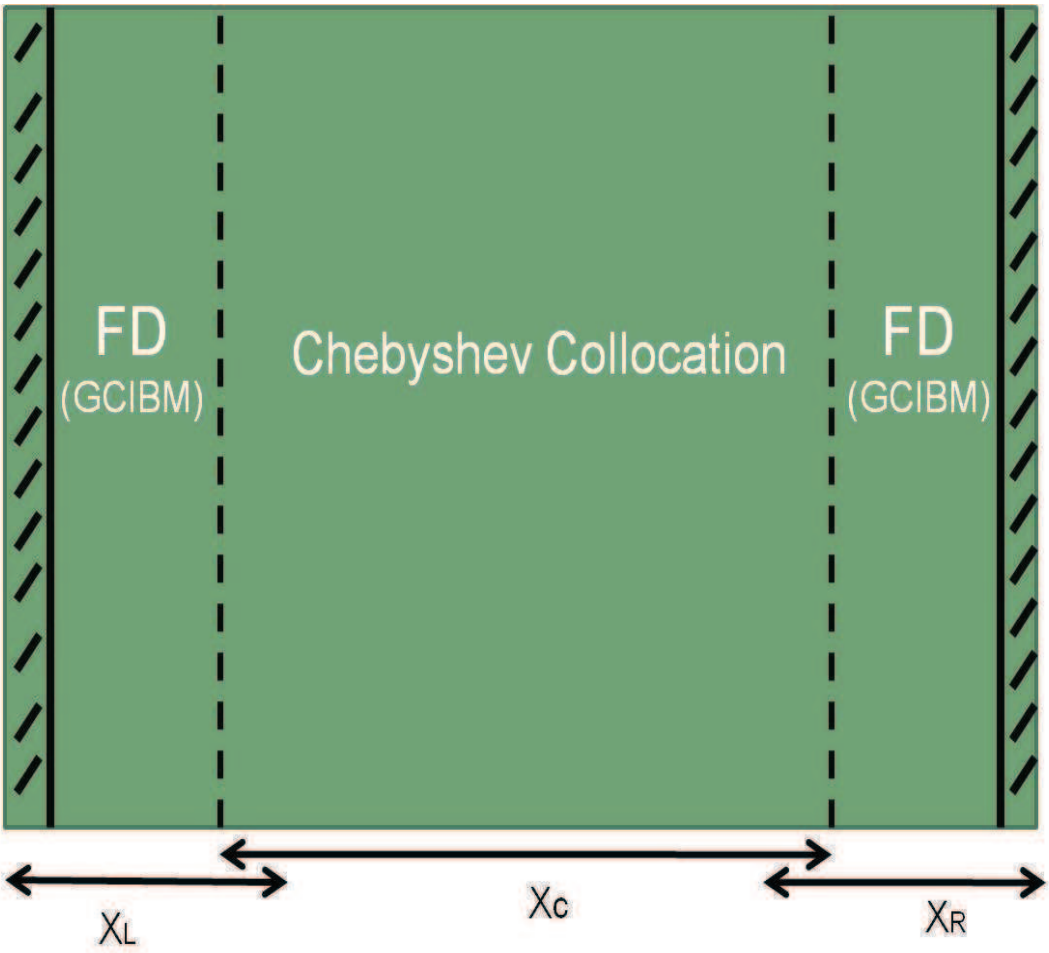

圖 13: 模式分解定義域示意圖; 模式兩側以二階中差分法搭配沉浸邊界法計算, 處理海洋邊界條件, 模式中央則以切比雪夫配置法搭配開放式邊界條件求解, 與兩側子定義域交錯一個網格點, 以彼此提供邊界條件。

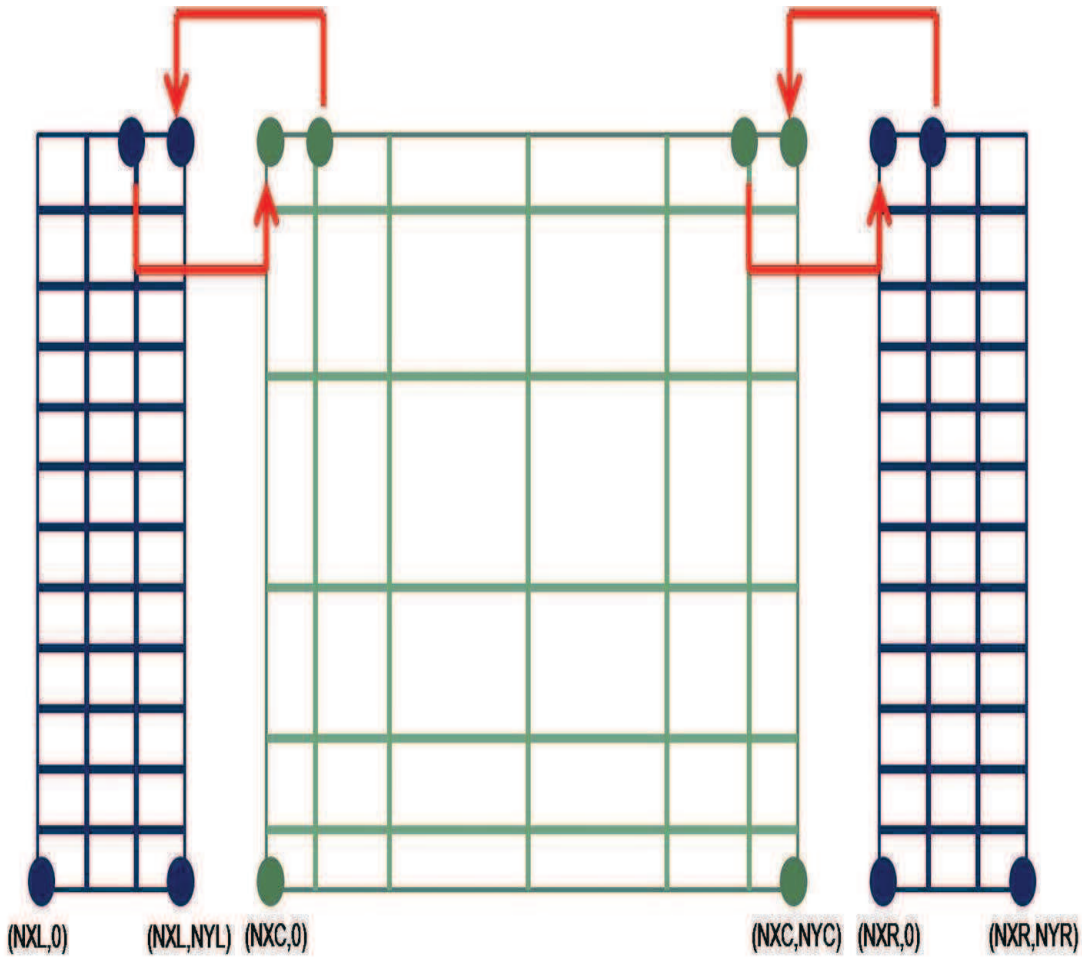

圖 14: 模式網格配置示意圖; 藍色網格爲二階中差分法網格點, 綠色網格爲切比雪夫配置法網格點, 子定義域間於東西向交錯兩個網格點以彼此提供邊界條件, 如紅色箭頭所示。

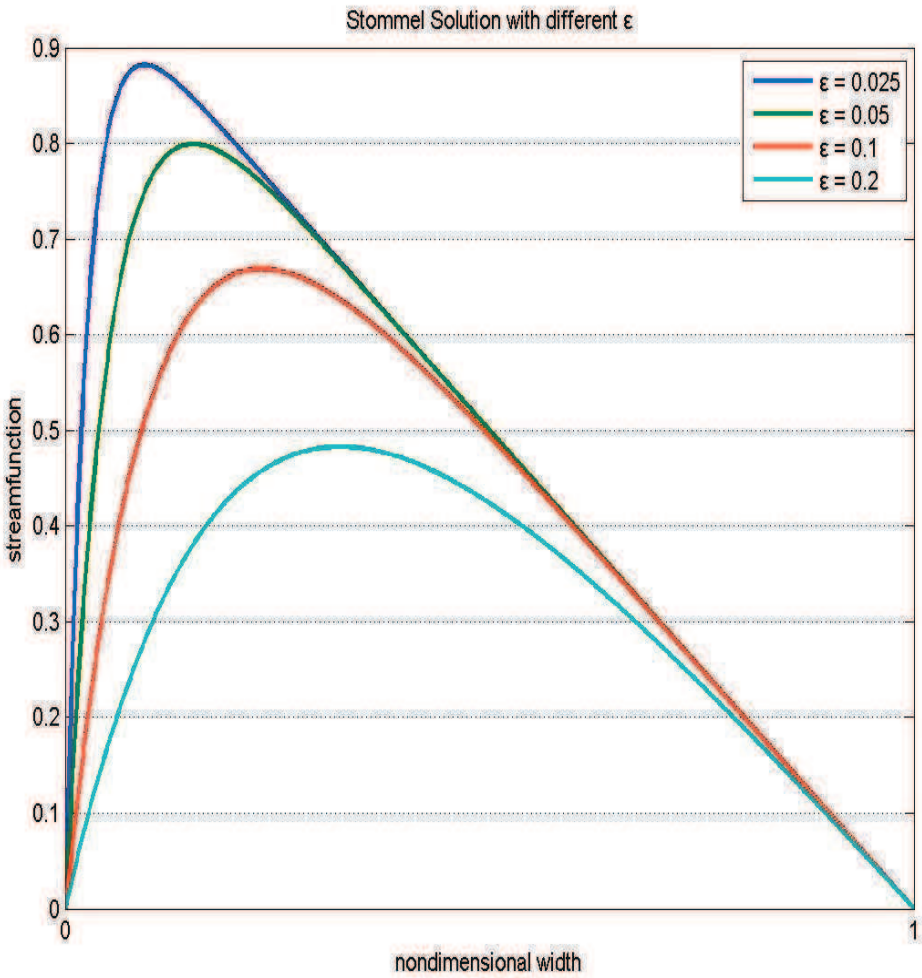

圖 15: 一維非線性史托梅爾模式敏感度測試, 橫軸爲模式無因次寬度, 縱軸爲無因次流函數; 故可發現參數ε控制模式中西方邊界流寬度,ε越大時西方邊界流無因次寬度越大, 量值越小。

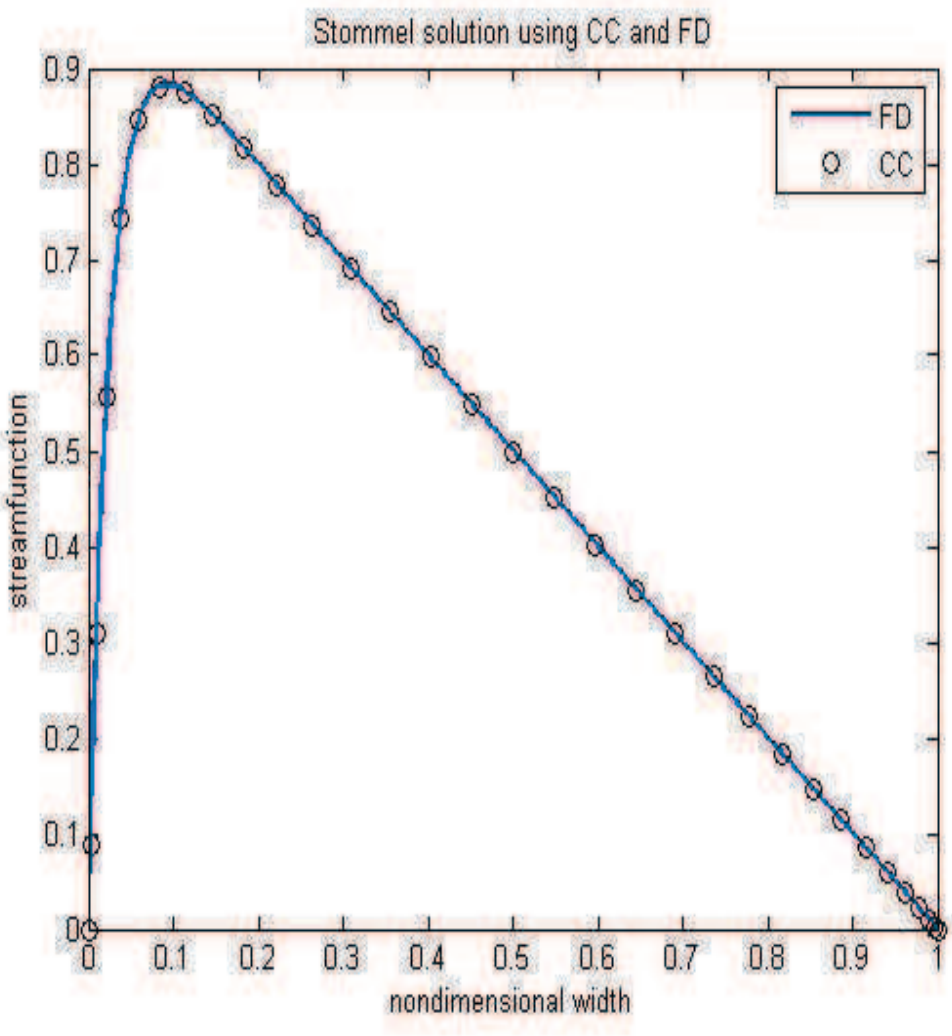

圖 16: 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件 (CC) 與二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法 (FD) 於一維線性史托梅爾模式穩定解比較, 橫軸爲模式無因次寬度, 縱軸爲無因次流函數; 可發現兩種數值方法模擬結果具一致性。

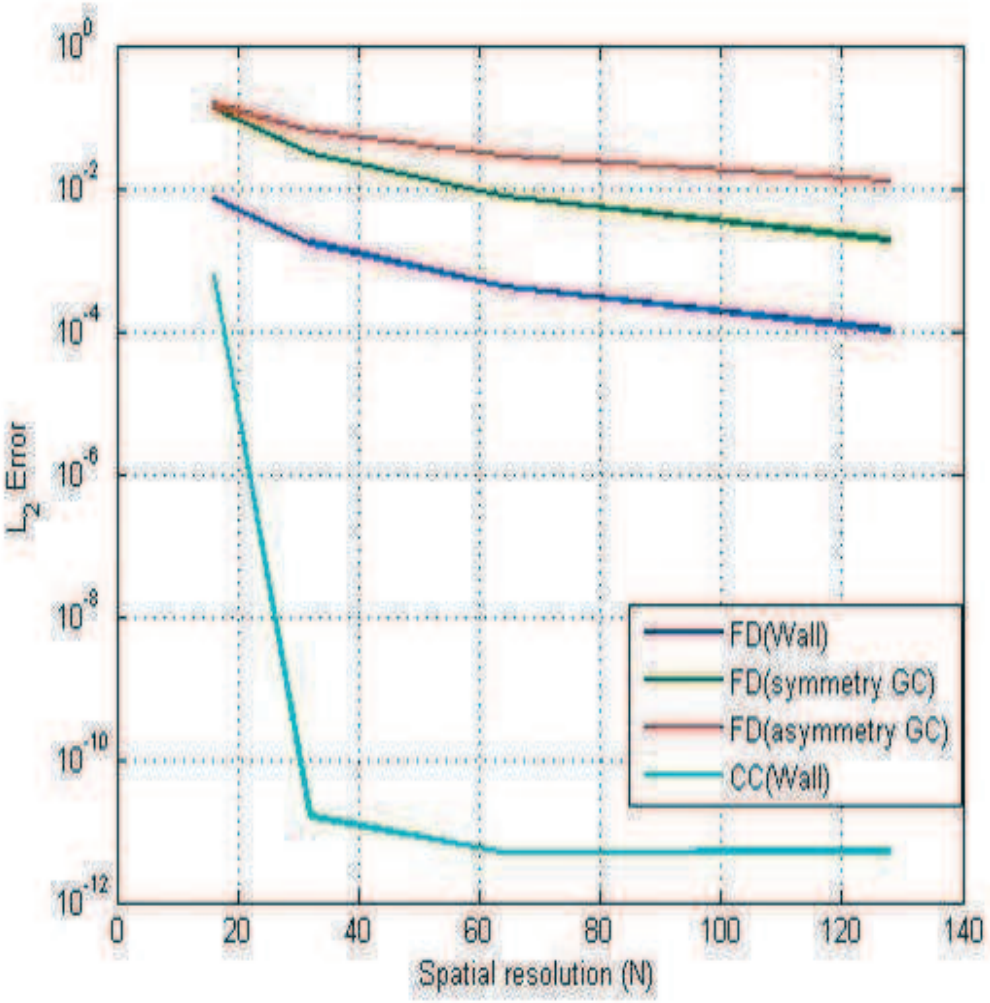

圖 17: 切比雪夫配置法 (CC) 搭配固體邊界條件 (Wall) 與二階中差分法 (FD) 搭配虛網格沉浸邊界法 (GC) 收斂速度比較圖, 橫軸爲模式計算網格點數, 縱軸爲方均根誤差; 可發現切比雪夫配置法具指數收斂之特性, 收斂速度遠快於二階中差分法的使用。

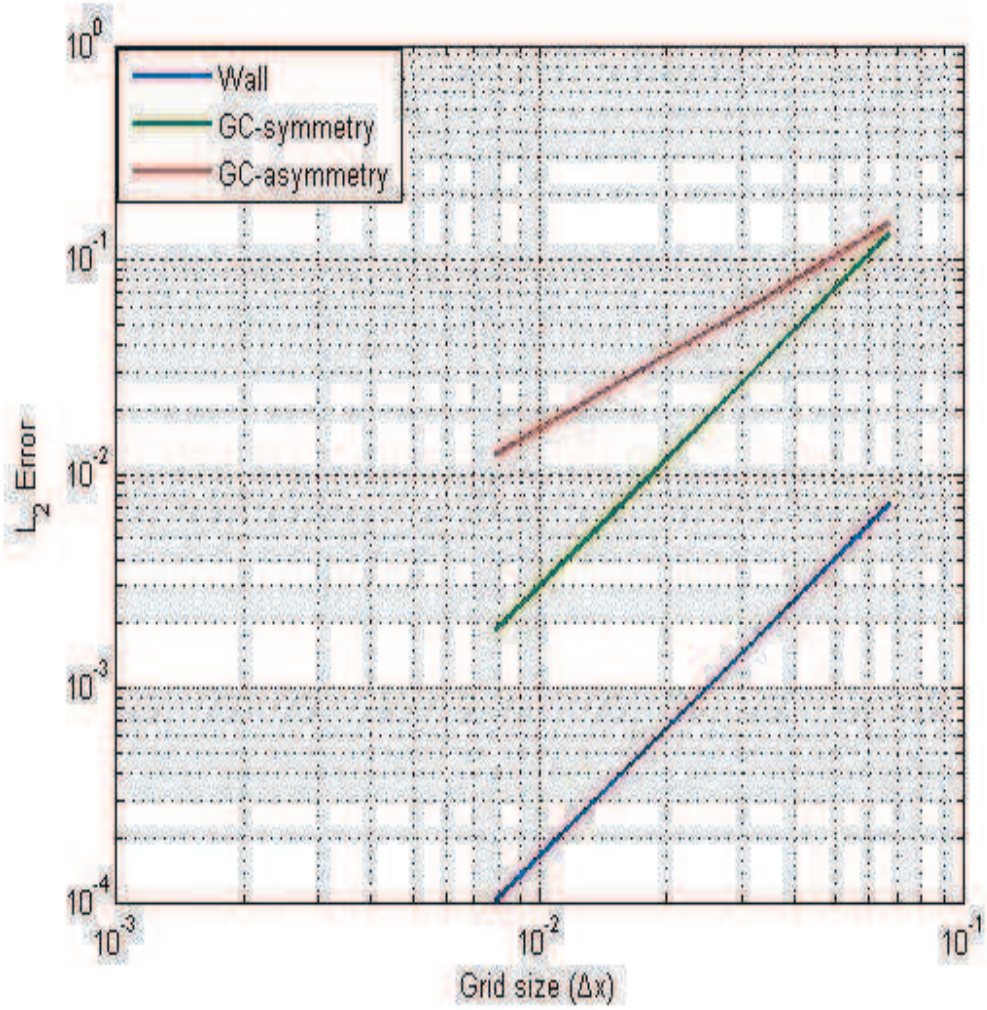

圖 18: 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法 (GC) 與固體邊界條件 (Wall) 收斂速度比較圖, 橫軸與縱軸爲皆爲對數座標, 分別表示模式網格點間距與方均根誤差; 可發現對稱虛網格點的使用精確度雖較固體邊界條件差, 但仍保有二階收斂速度, 非對稱虛網格點的使用則於精確度與收斂速度的表現皆較差, 顯示複雜邊界下須使用高階內差方法給定虛網格點函數值。

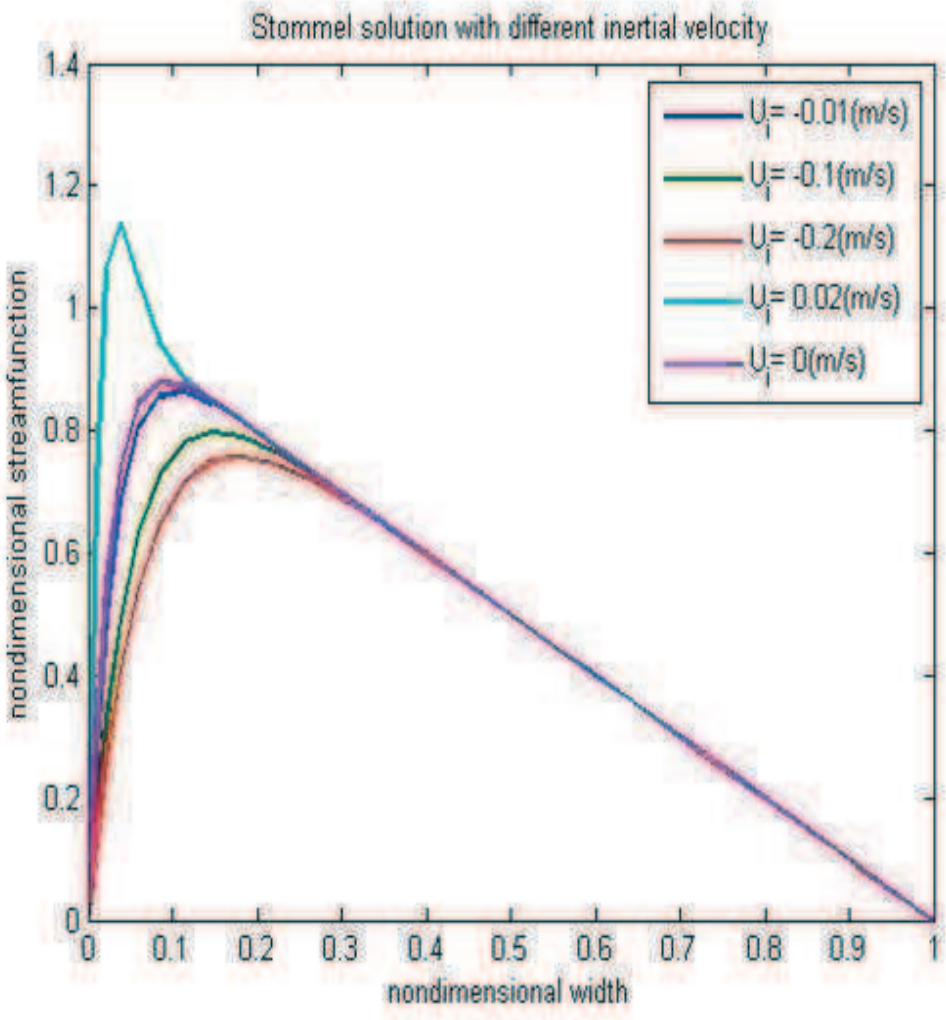

圖 19: 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件於不同平均流 (U_i) 下數值穩定解比較圖, 橫軸爲模式無因次寬度, 縱軸爲無因次流函數; 故可發現平均流向東時西方邊界流寬度將減小且強度加強, 平均流向西則反之。

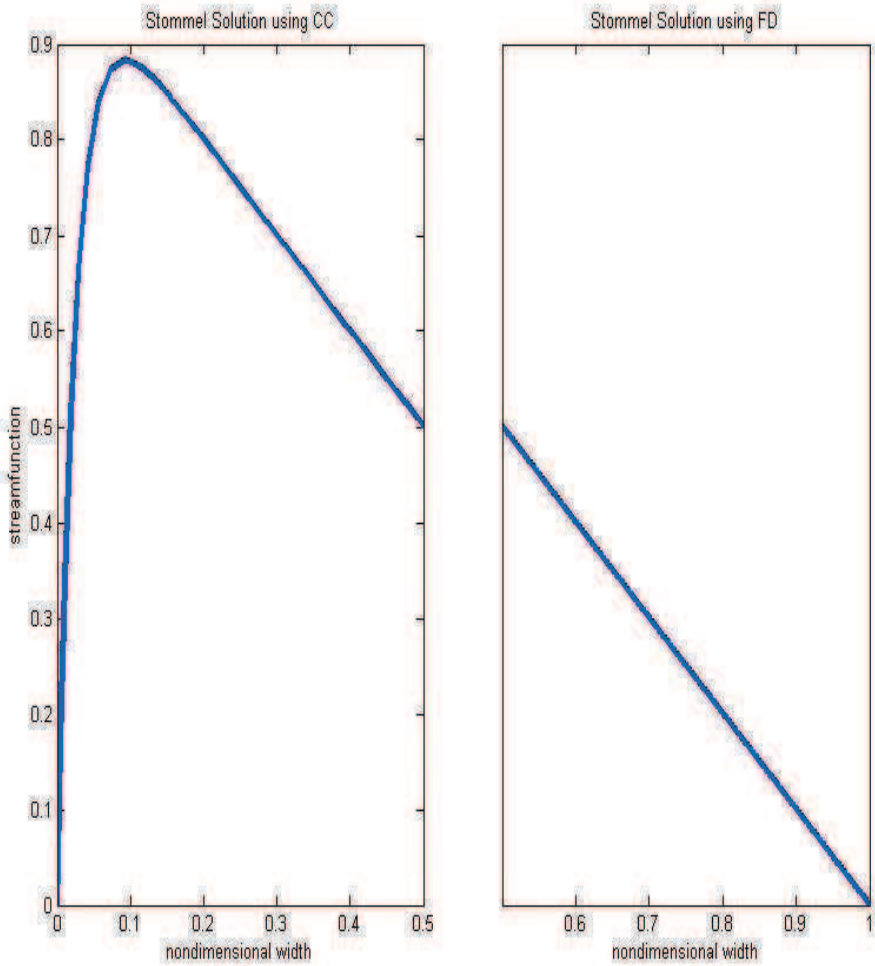

圖 20: 分解定義域應用於切比雪夫配置法 (CC) 與二階中差分法搭配沉浸邊界法 (FD) 之數值穩定解, 橫軸爲模式無因次寬度, 縱軸爲無因次流函數; 模擬結果顯示分解定義域前後穩定解具一致性, 故兩種數值方法可藉由分解定義域的使用穩定運行。

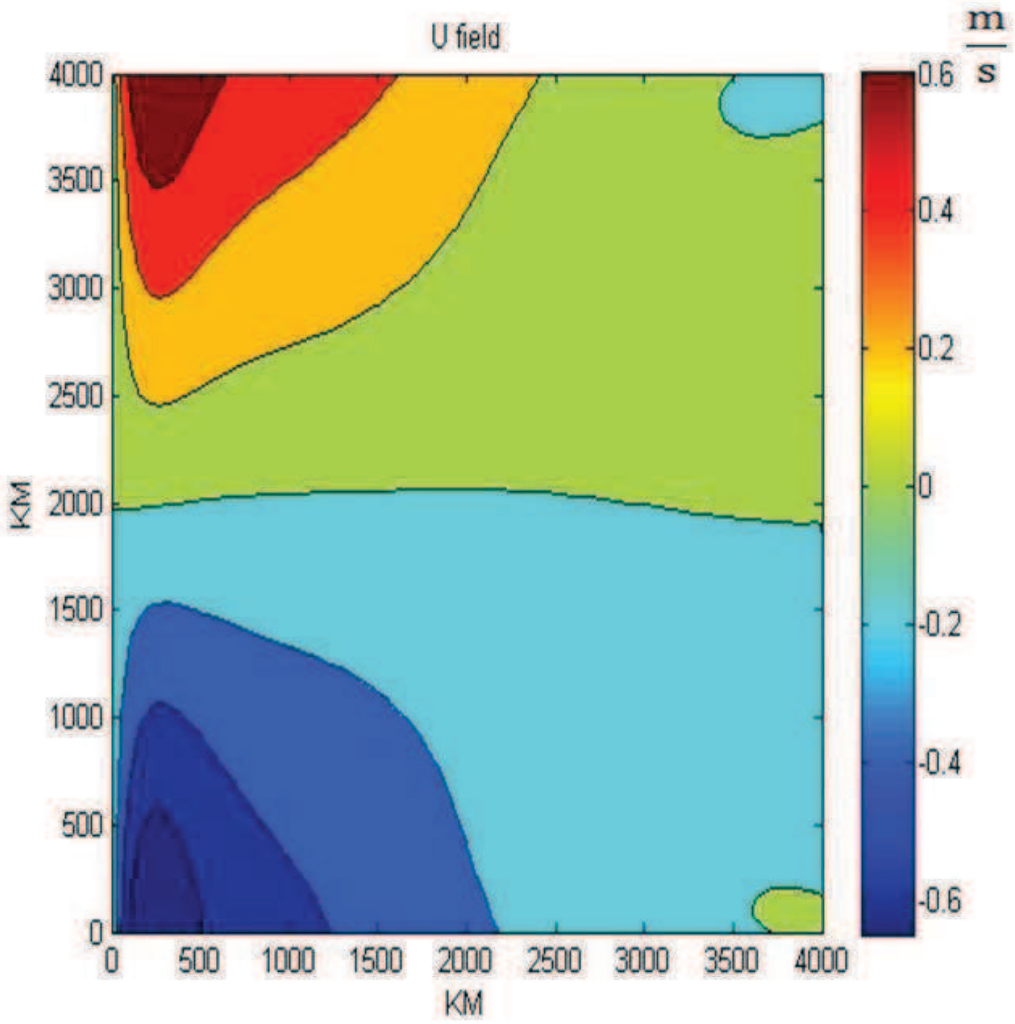

圖 21: 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件所模擬之東西向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現東西向速度場呈現南北反對稱的形式, 北邊爲正 (向東) 南邊爲負 (向西) 。

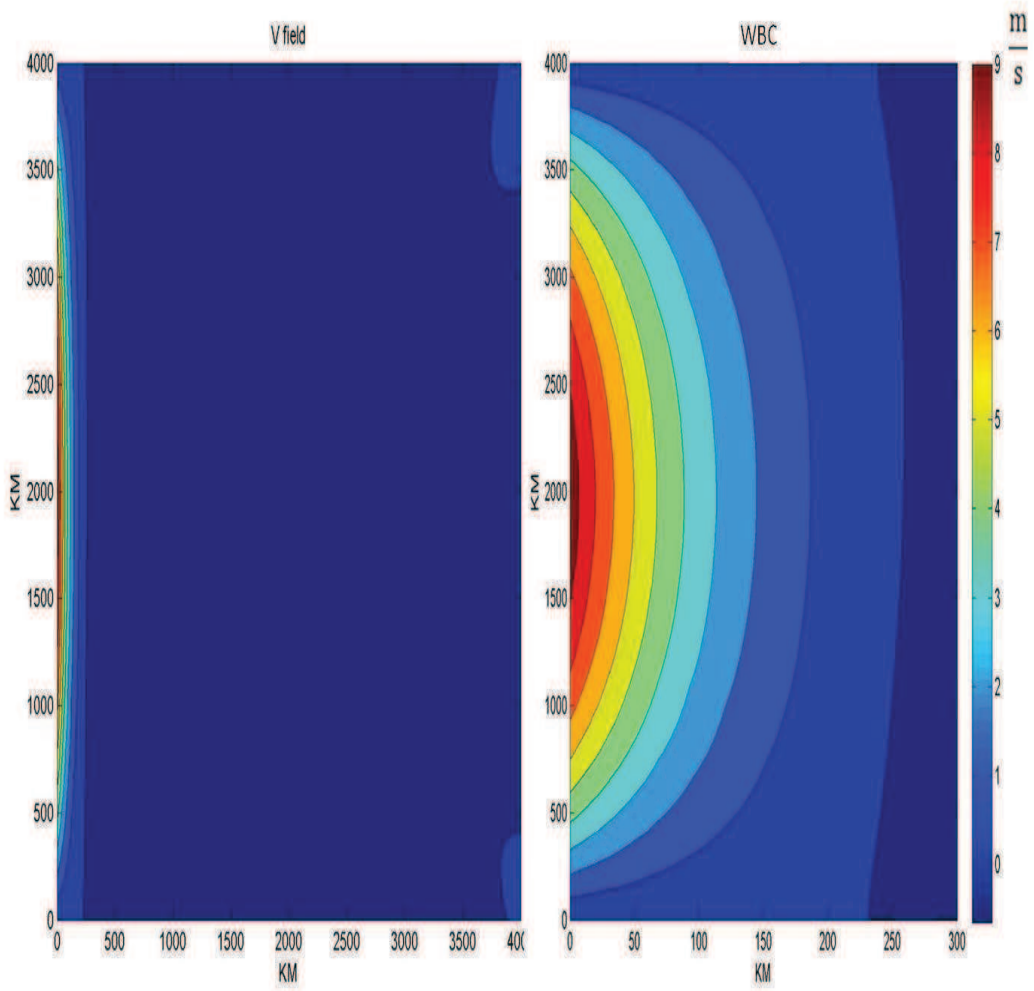

圖 22: 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件所模擬之南北向速度場, 左圖爲海洋整體, 右圖爲西方邊界流區域, 單位皆爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現海洋中僅於靠近西邊界處有顯著地向北運動, 且其速度量值遠大於海洋其餘各處之向南運動。

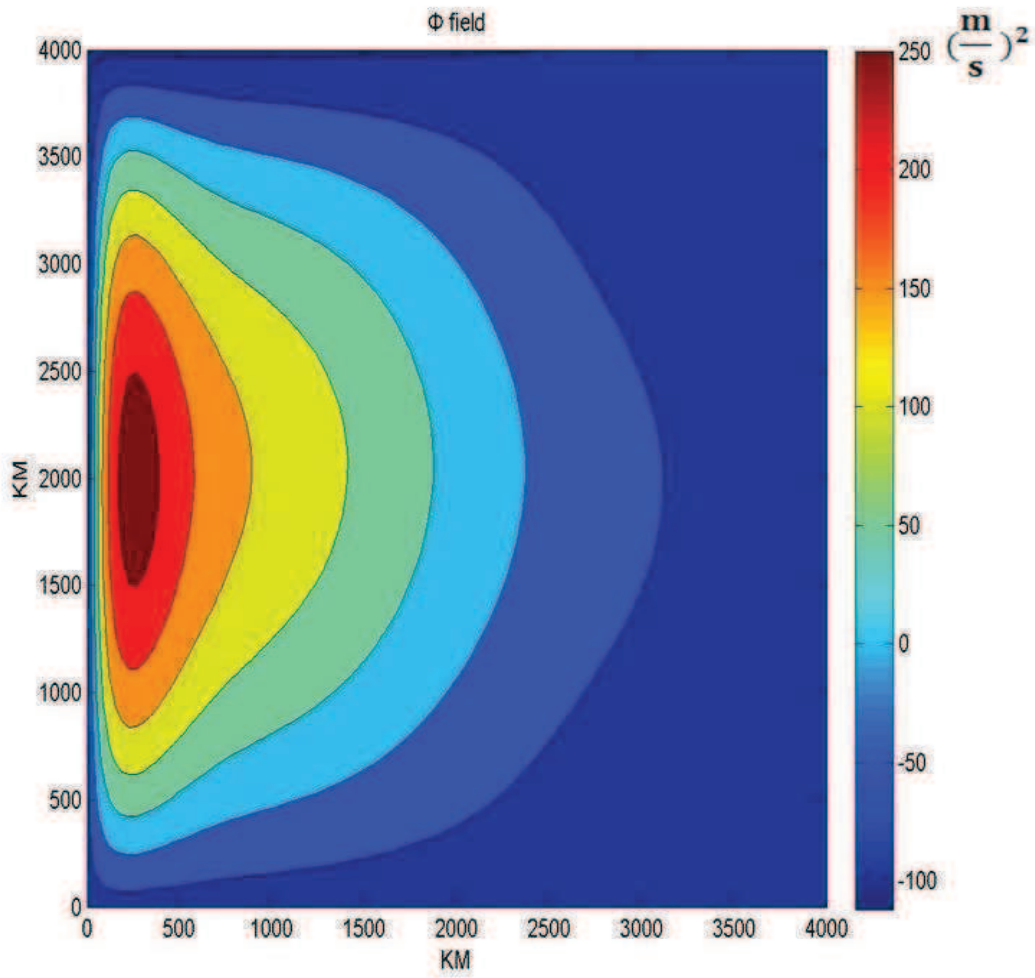

圖 23: 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件所模擬之重力位高度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})^2$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現重力位高度呈現西高東低且南北對稱的分佈情形。

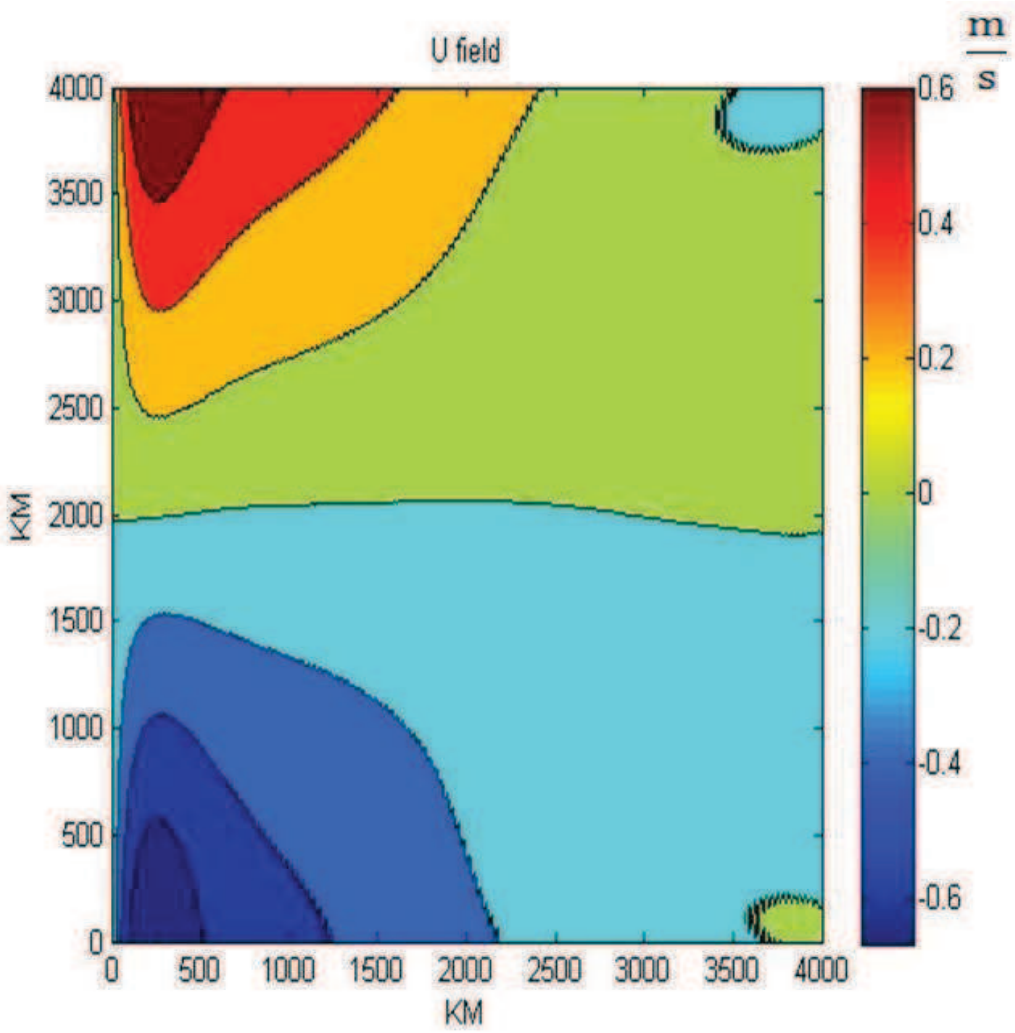

圖 24: 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之東西向速度場, 單位爲 ($\frac{m}{s}$) , 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現東西向速度場呈現南北反對稱的形式, 北邊爲正 (向東) 南邊爲負 (向西) 。

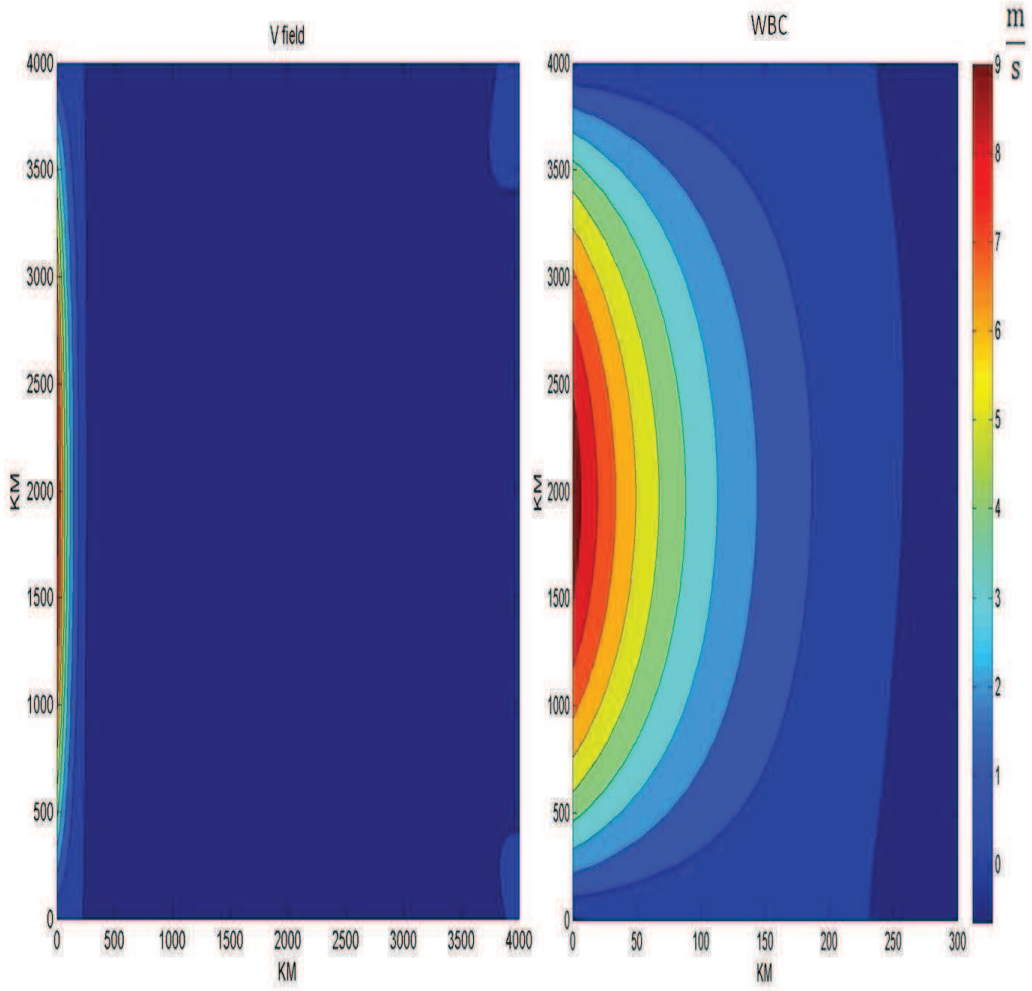

圖 25: 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之南北向速度場, 左圖爲海洋整體, 右圖爲西方邊界流區域, 單位皆爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現海洋中僅於靠近西邊界處有顯著地向北運動, 且其速度量值遠大於海洋其餘各處之向南運動。

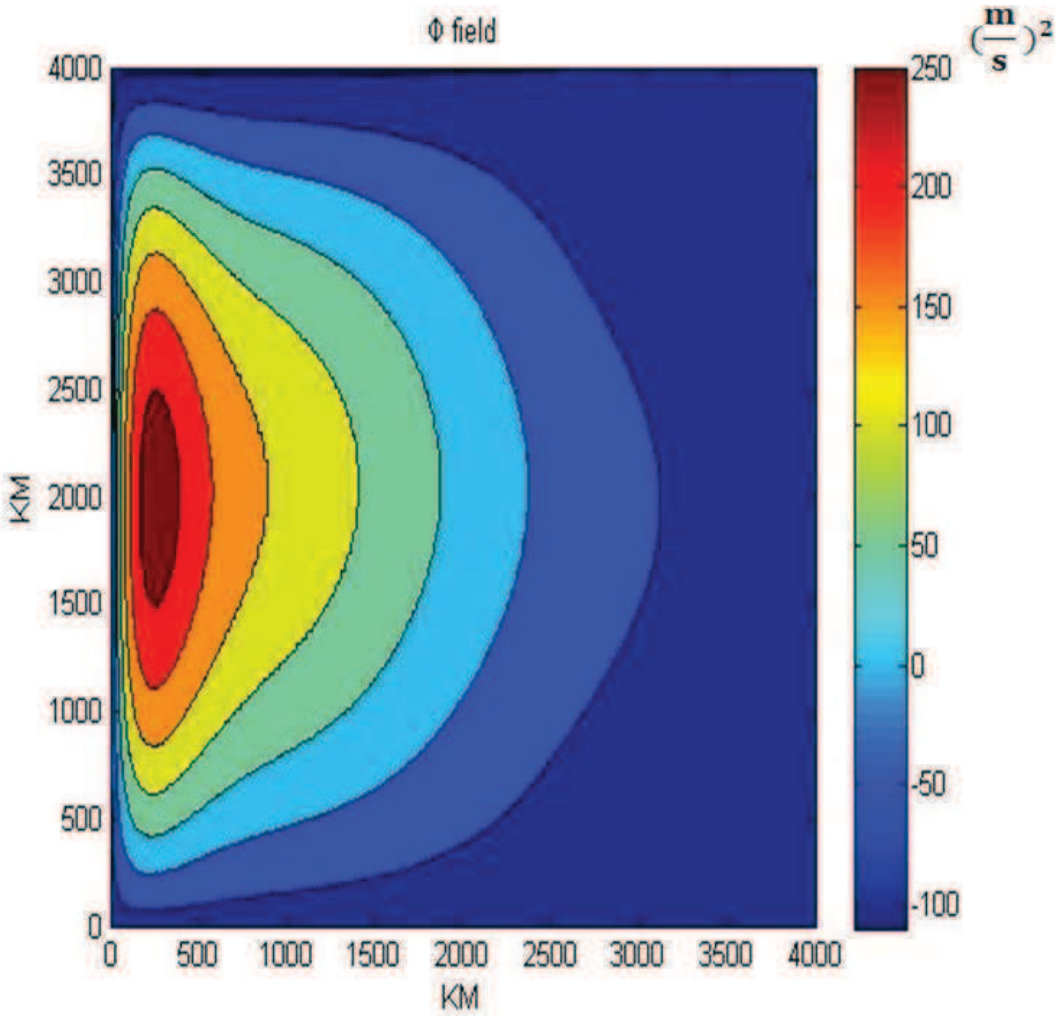

圖 26: 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之重力位高度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})^2$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現重力位高度呈現西高東低且南北對稱的分佈情形。

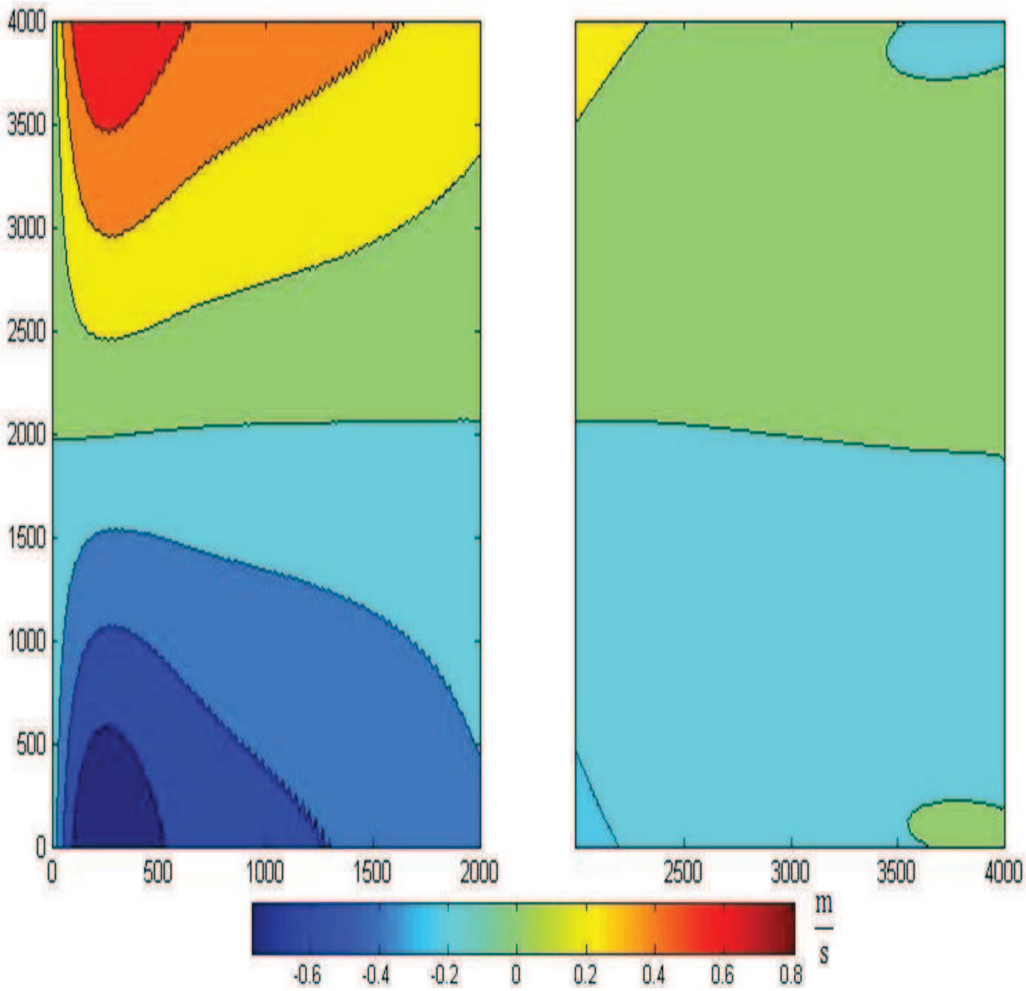

圖 27: 分解定義域藉由二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之東西向速度場, 單位爲 ($\frac{m}{s}$) , 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現東西向速度場呈現南北反對稱的形式, 北邊爲正 (向東) 南邊爲負 (向西) 。

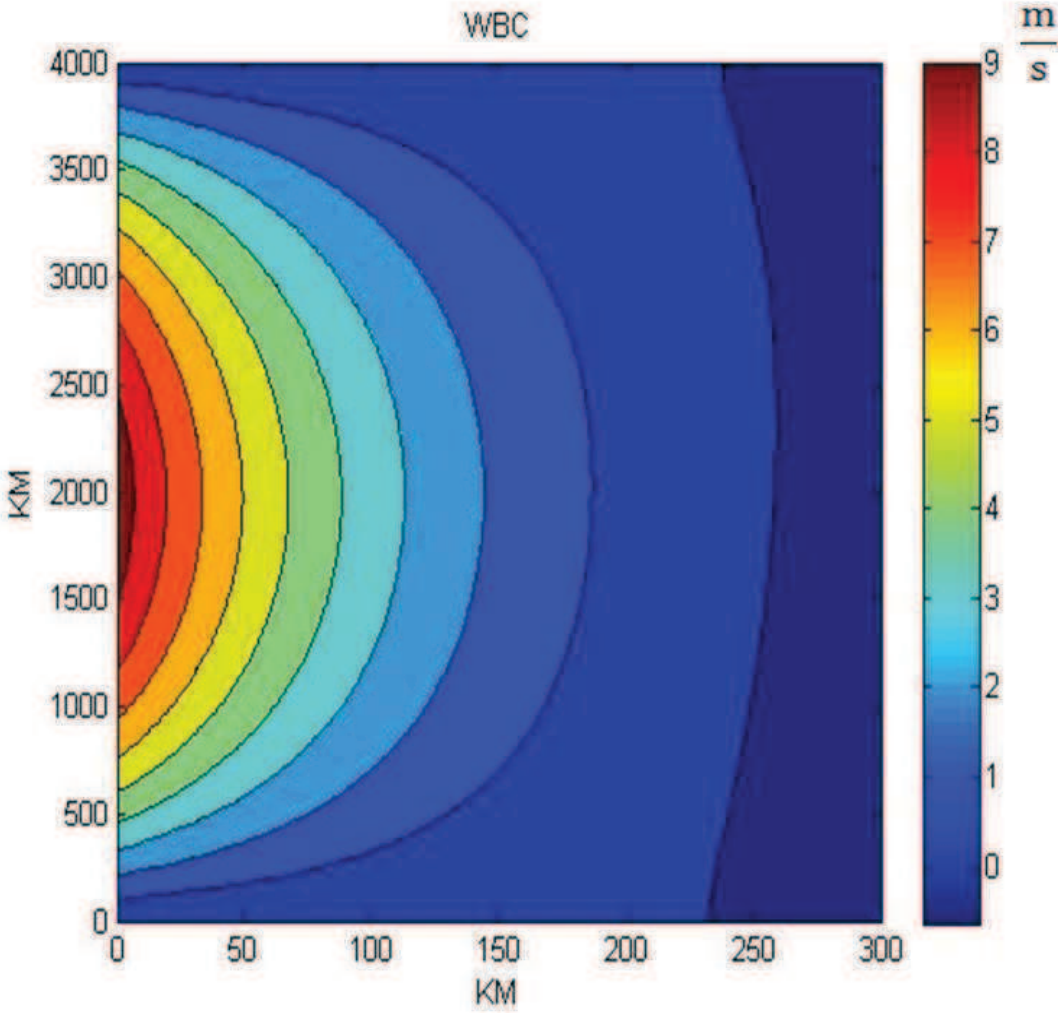

圖 28: 分解定義域藉由二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之南北向速度場, 擷取西方邊界流區域, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現海洋中向北運動極大值於位於西方邊界, 且以半縱軸爲對稱軸南北對稱。

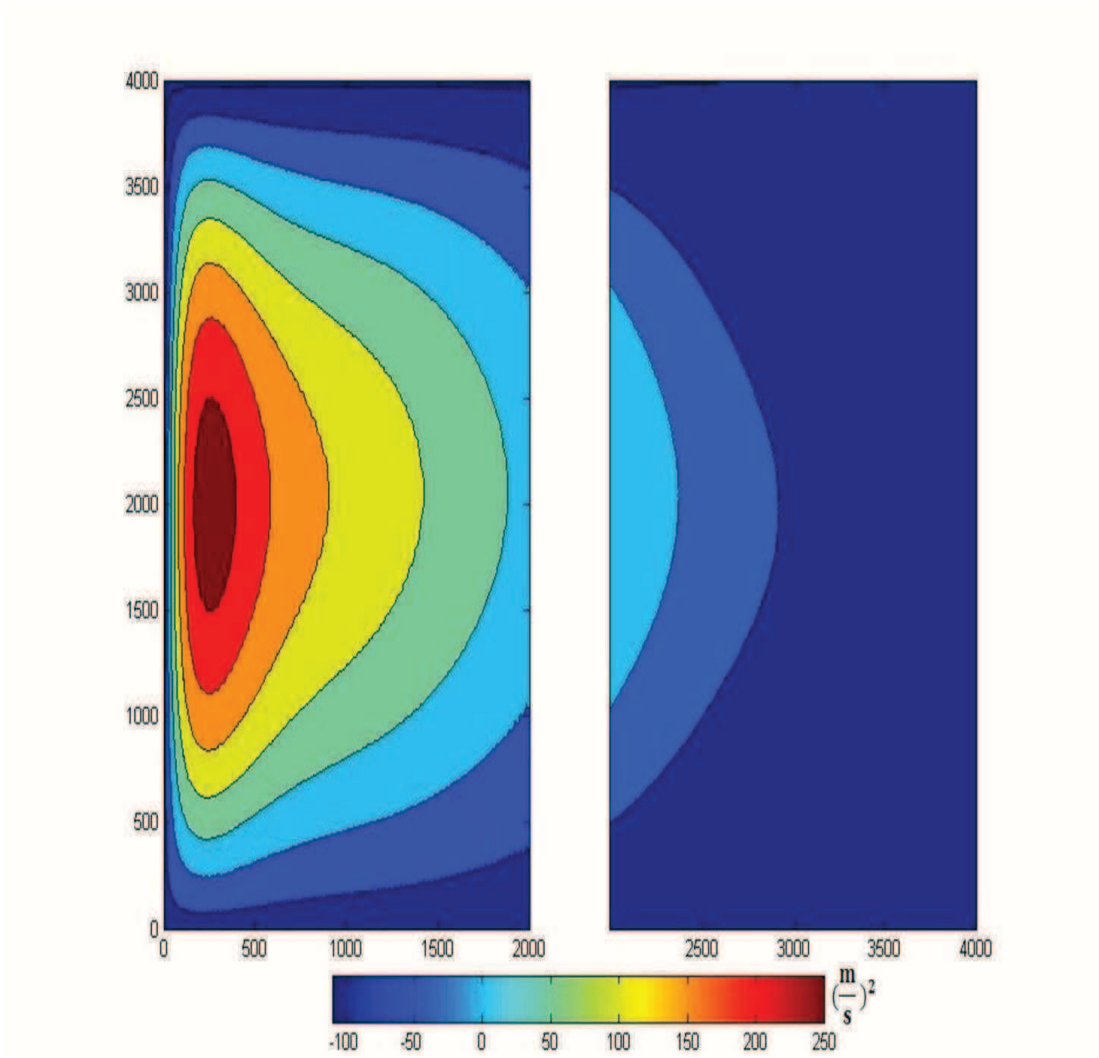

圖 29: 分解定義域藉由二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之重力位高度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})^2$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現重力位高度呈現西高東低且南北對稱的分佈情形。

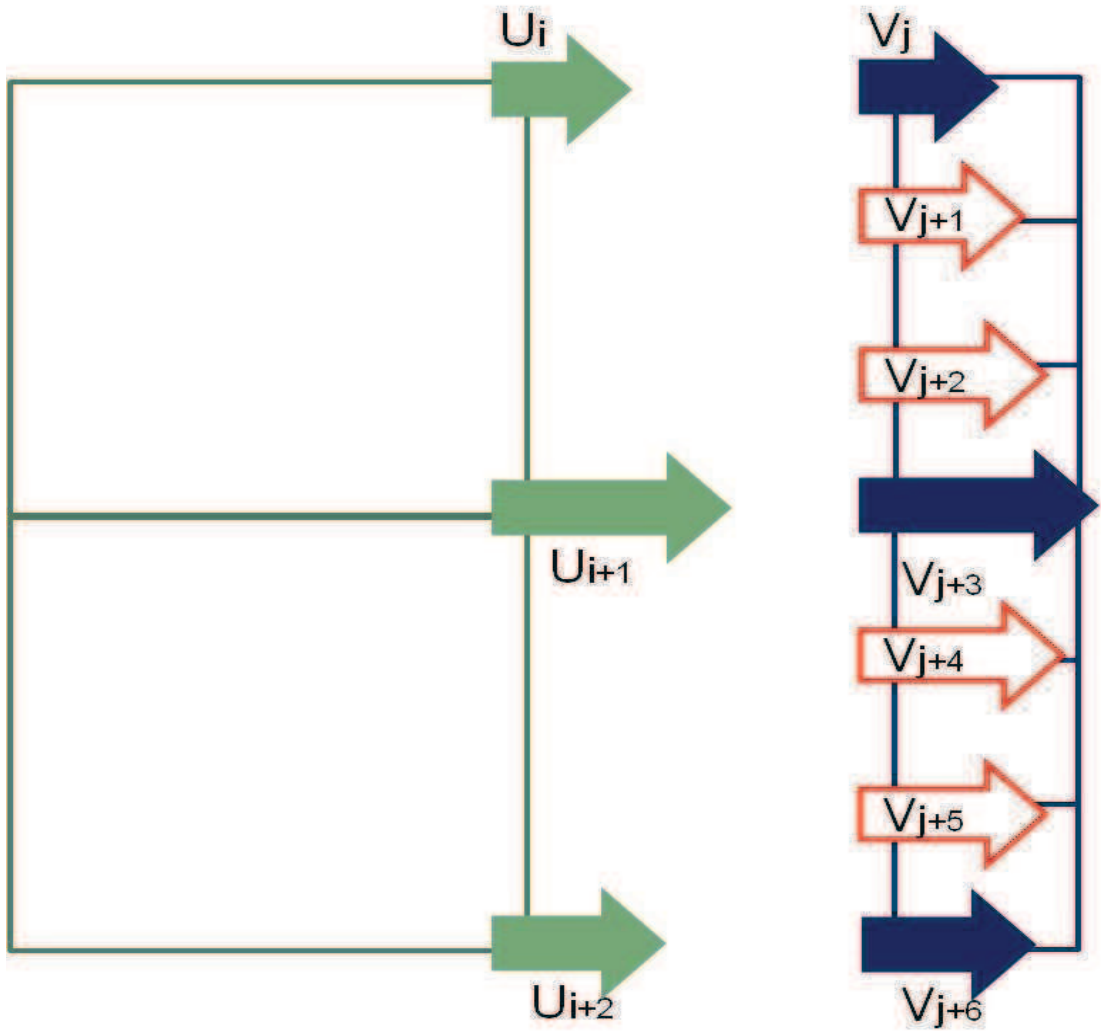

圖 30: 粗細網格點解析度差異造成子定義域合併處邊界質量通量不連續示意圖, 網格點完全重疊時可直接給定函數值, 以實心箭號表示, 不完全重疊時須藉由數值內差給定函數值, 以空心箭號表示; 可發現粗細解析度下計算之質量通量量值必定有誤差存在, 固有質量通量不連續產生。

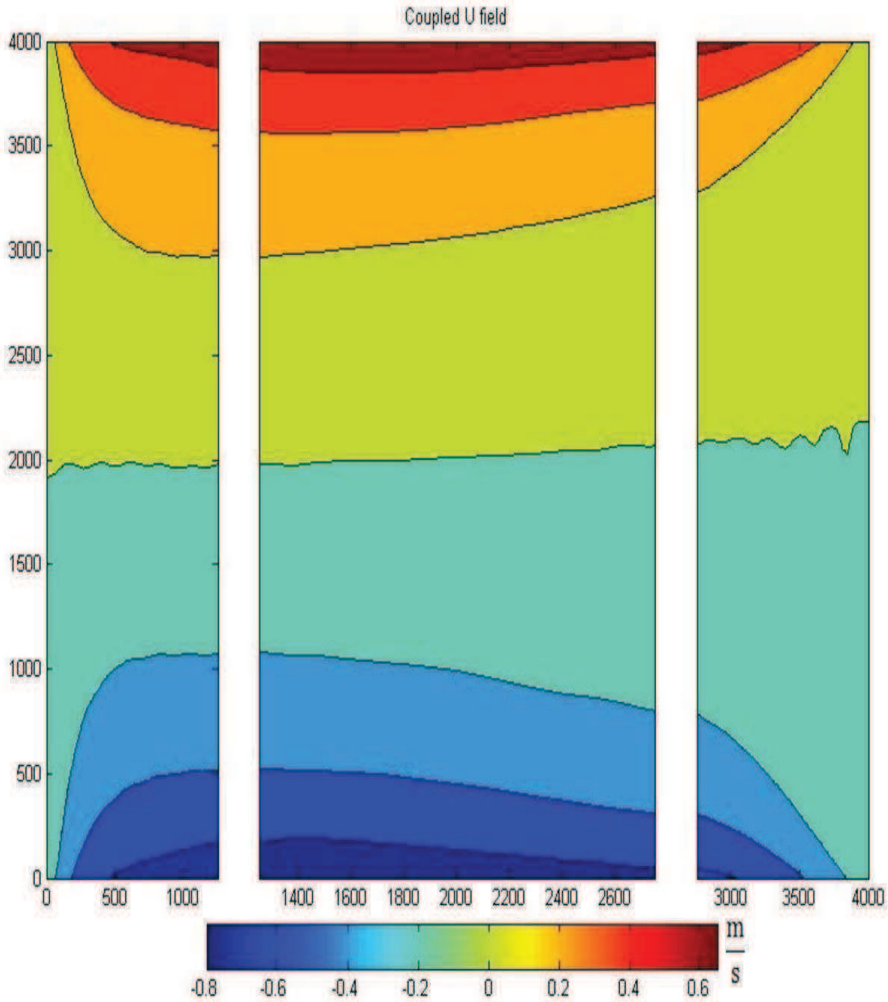

圖 31: 二維線性耦合模式所模擬之東西向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現東西向速度場呈現南北反對稱的形式, 北邊爲正 (向東) 南邊爲負 (向西) 。

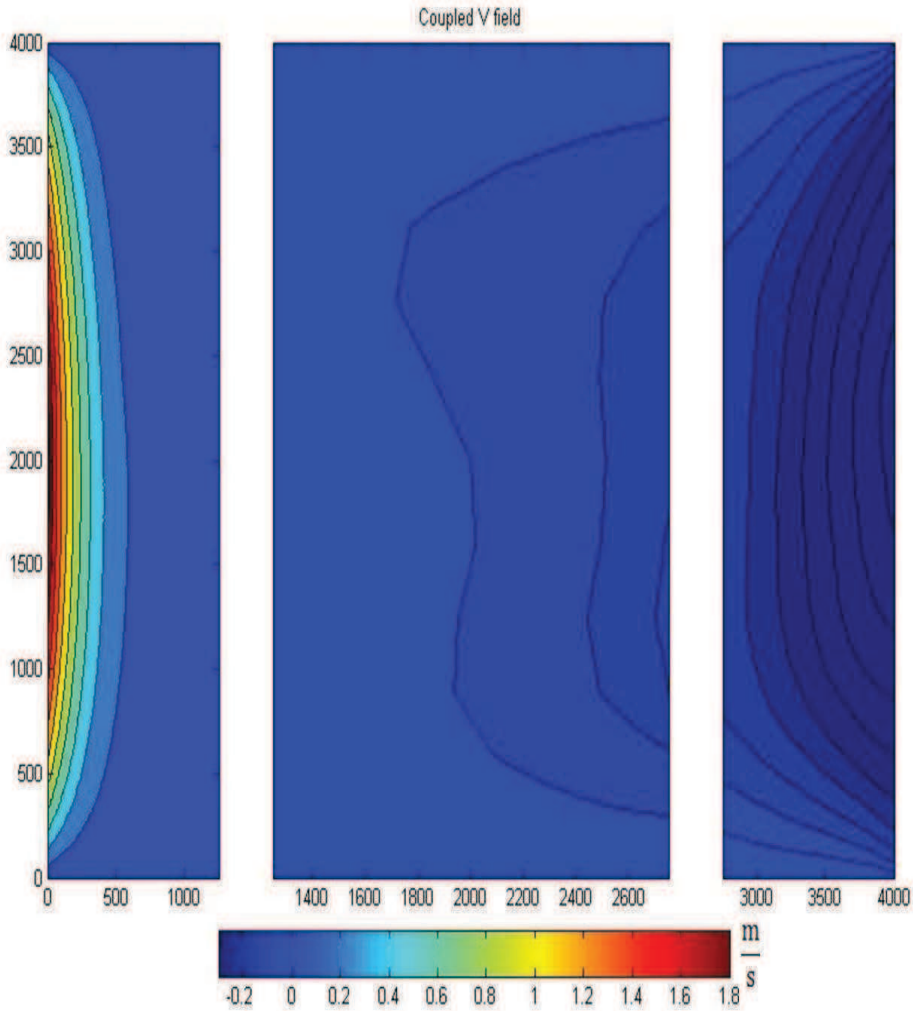

圖 32: 二維線性耦合模式所模擬之南北向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現南北向速度場以半縱軸爲對稱軸南北對稱, 且西方邊界處有向北運動極大值, 量值較其餘海洋區域爲大。

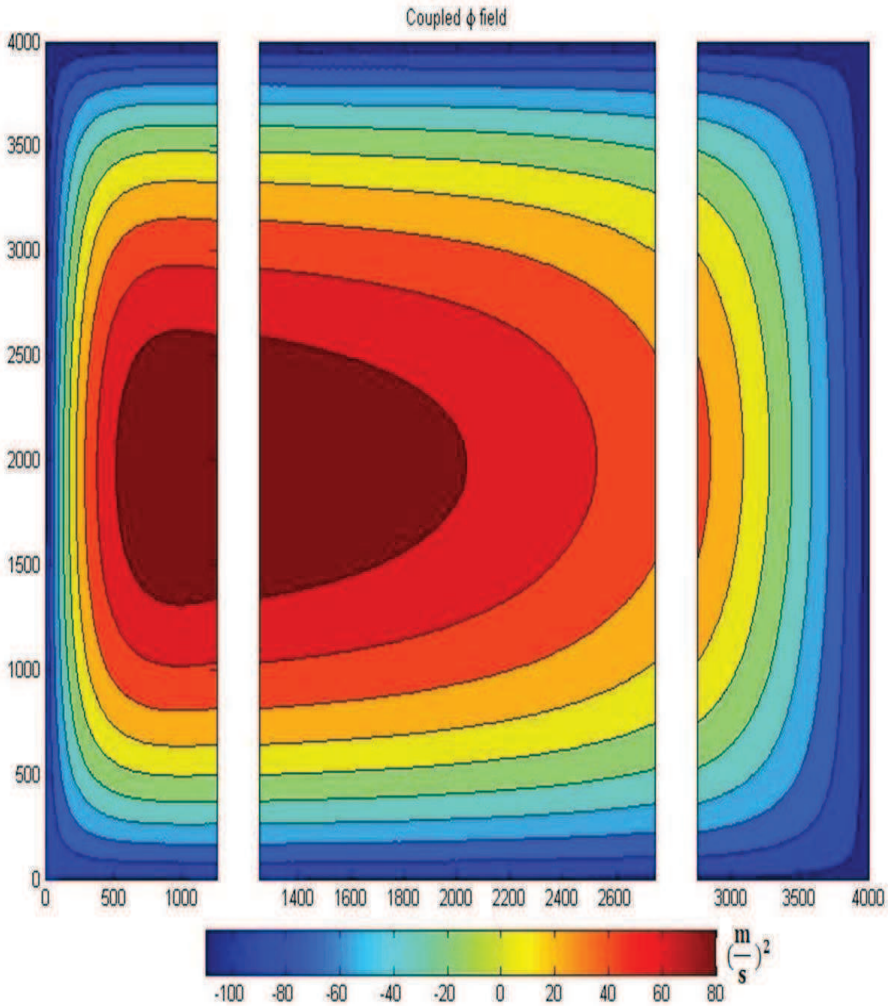

圖 33: 二維線性耦合模式所模擬之重力位高度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})^2$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現重力位高度呈現西高東低的分佈情形。

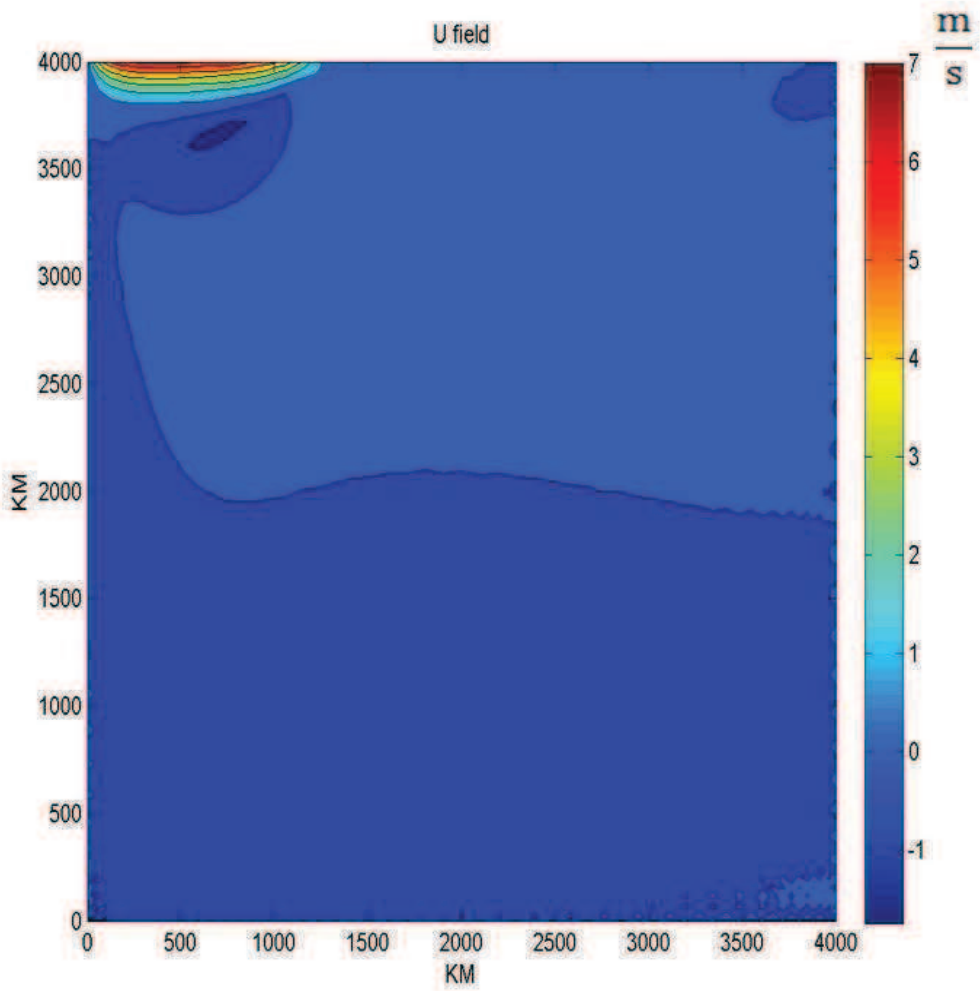

圖 34: 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件所模擬之東西向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現線性結果之對稱性已不復存, 東西向速度場僅於西北邊界有極大值。

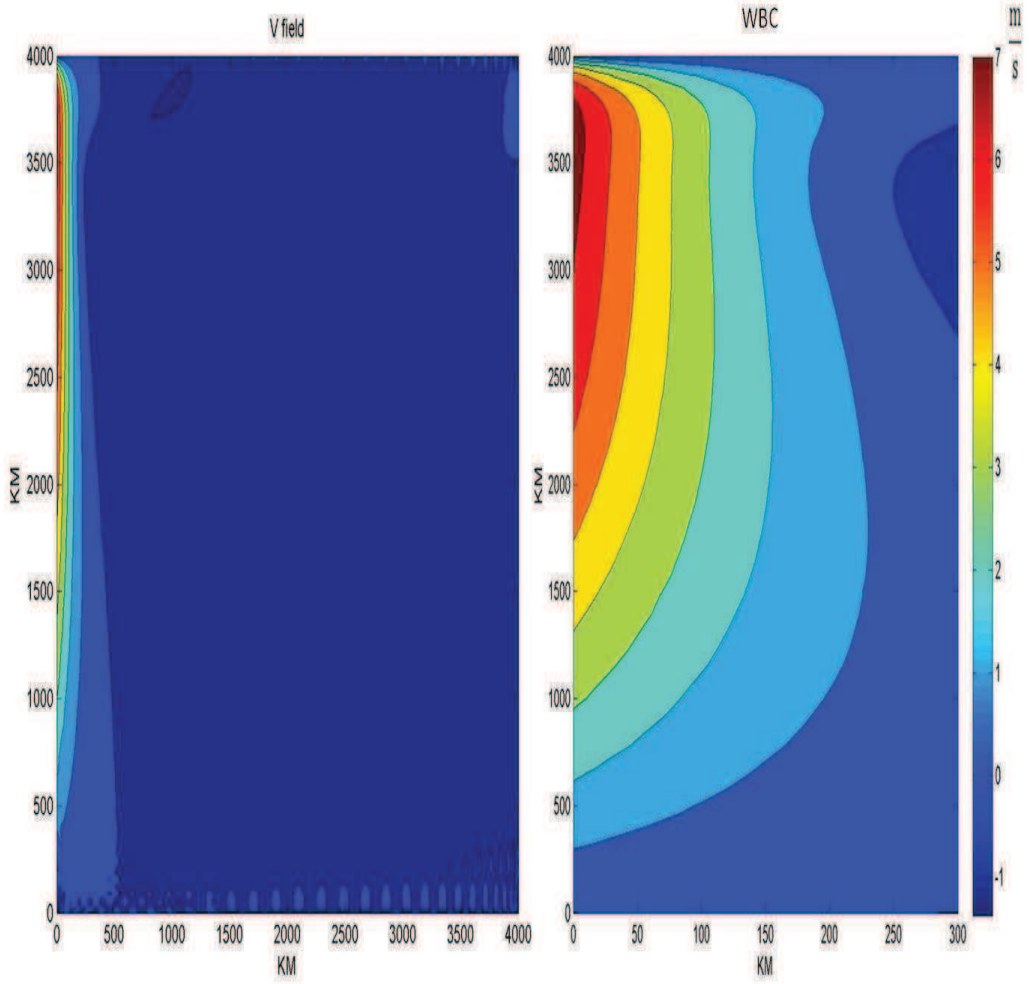

圖 35: 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件所模擬之南北向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 雖同樣具有顯著西方邊界流現象, 但向北運動極大值向北方偏移, 不具線性結果之對稱性。

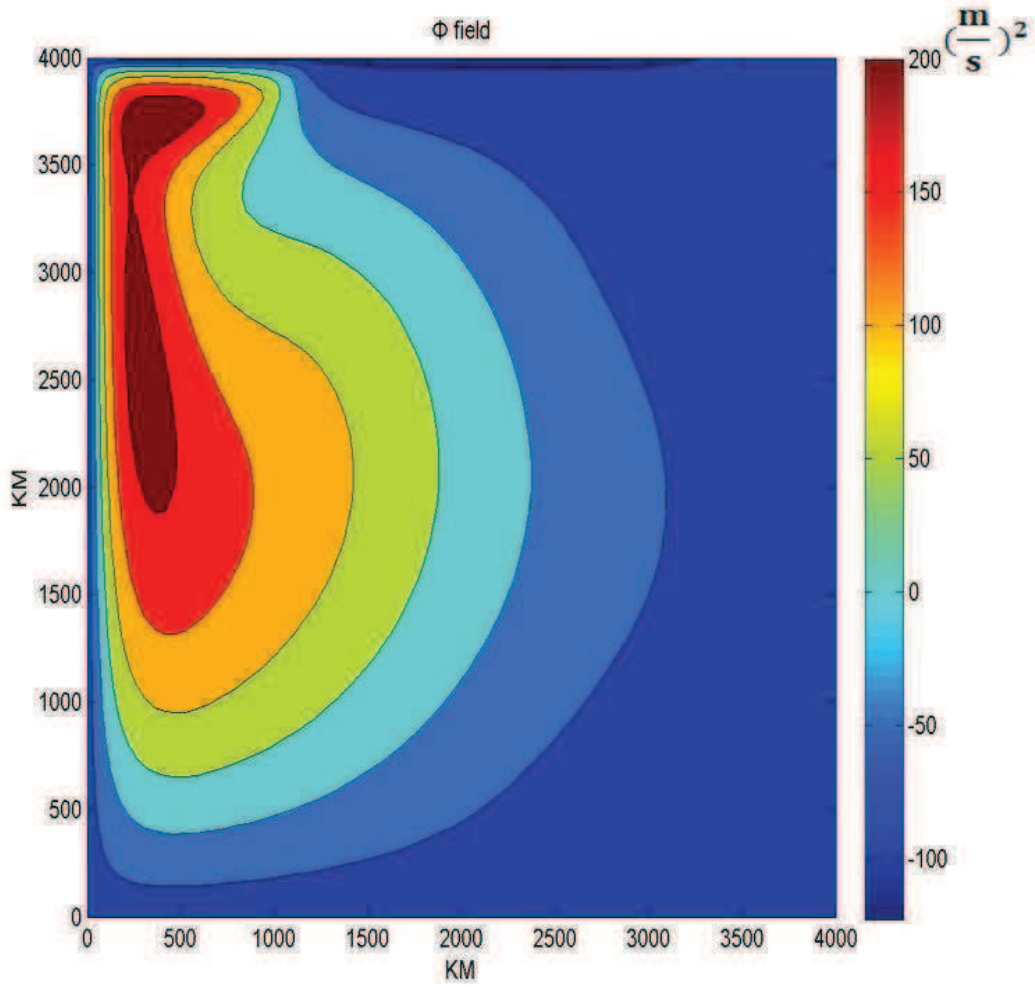

圖 36: 切比雪夫配置法搭配固體邊界條件所模擬之重力位高度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})^2$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現重力位高度場仍以西高東低質量聚集於西方邊界的情形分佈, 但極大值亦有向北偏移的現象產生。

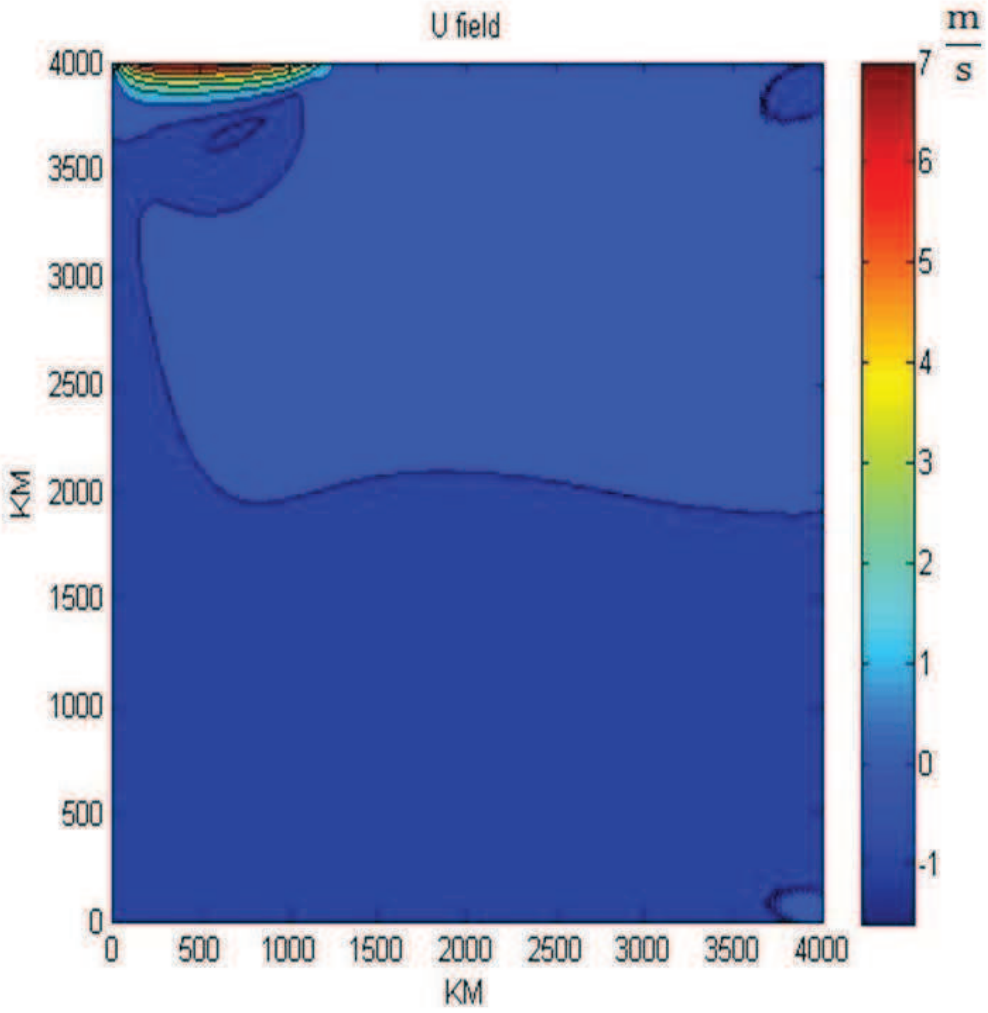

圖 37: 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之東西向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現線性結果之對稱性已不復存, 東西向速度場僅於西北邊界有極大值。

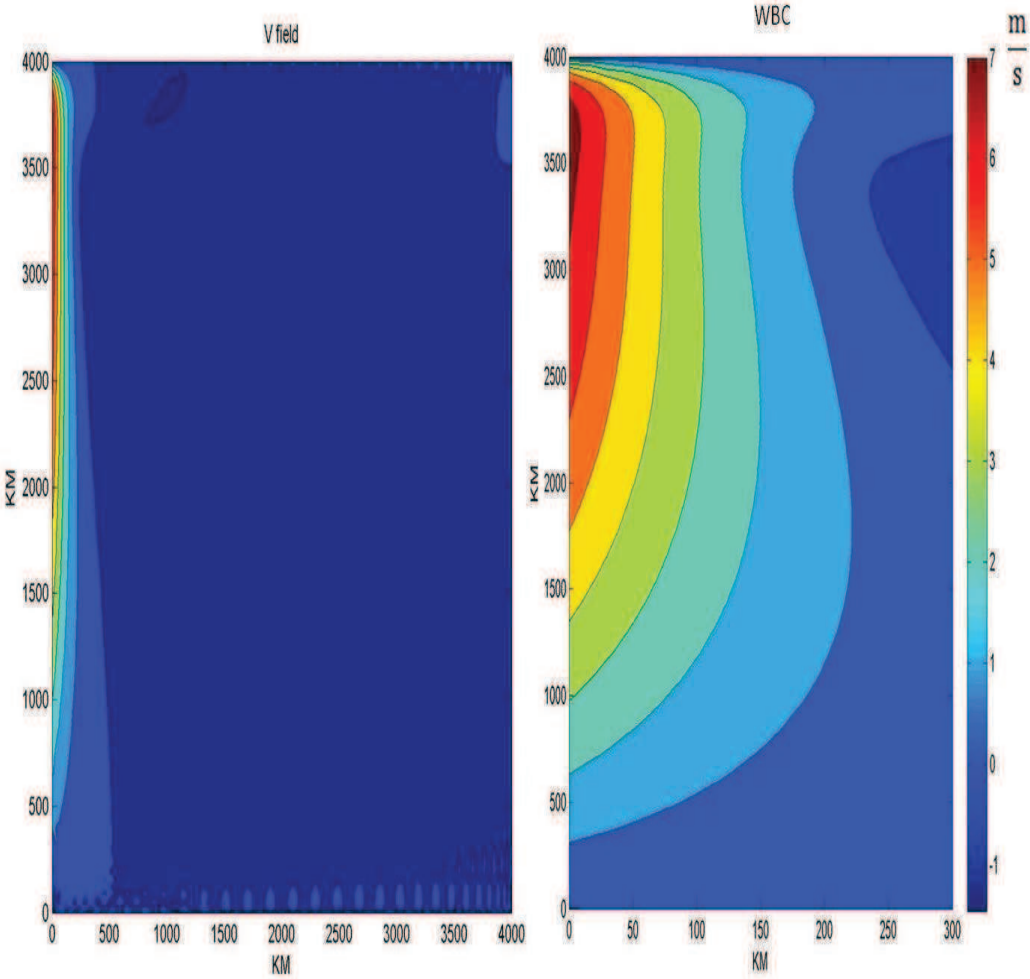

圖 38: 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之南北向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 雖同樣具有顯著西方邊界流現象, 但向北運動極大值向北方偏移, 不具線性結果之對稱性。

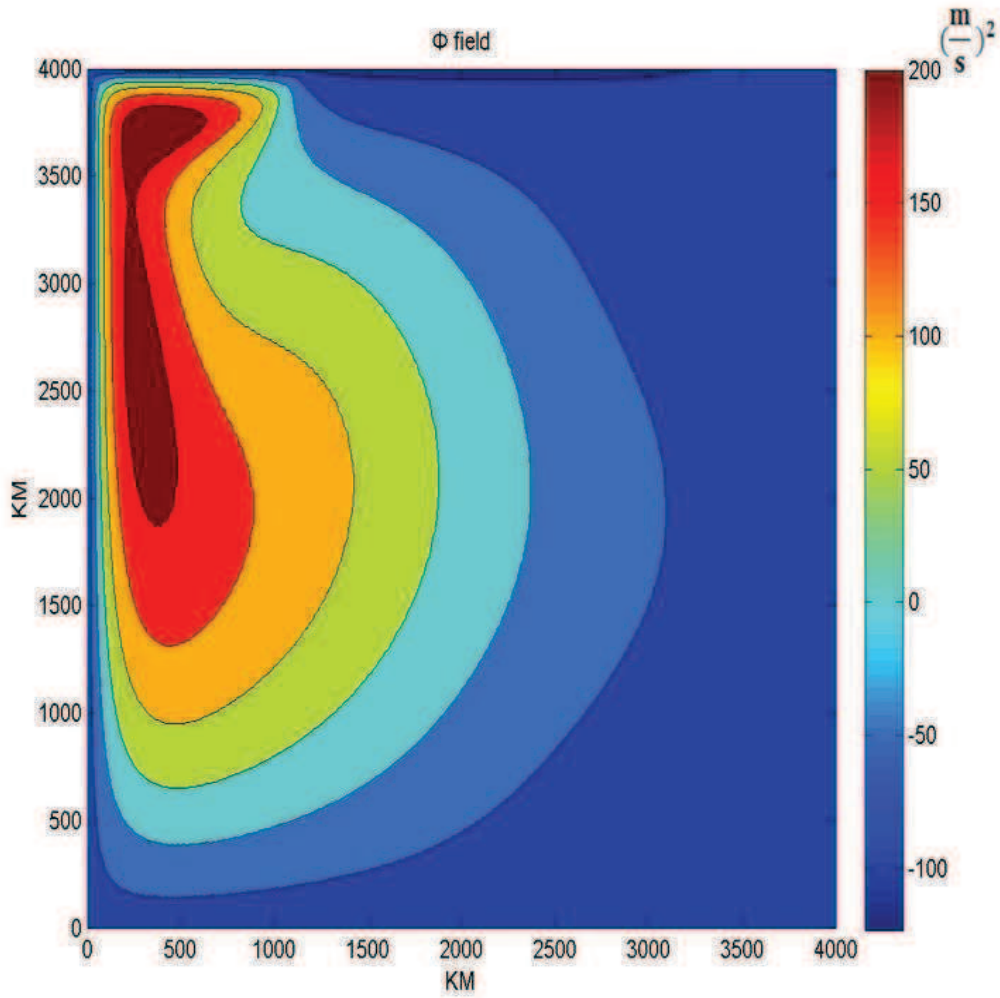

圖 39: 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之重力位高度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})^2$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現重力位高度場仍以西高東低質量聚集於西方邊界的情形分佈, 但極大值亦有向北偏移的現象產生。

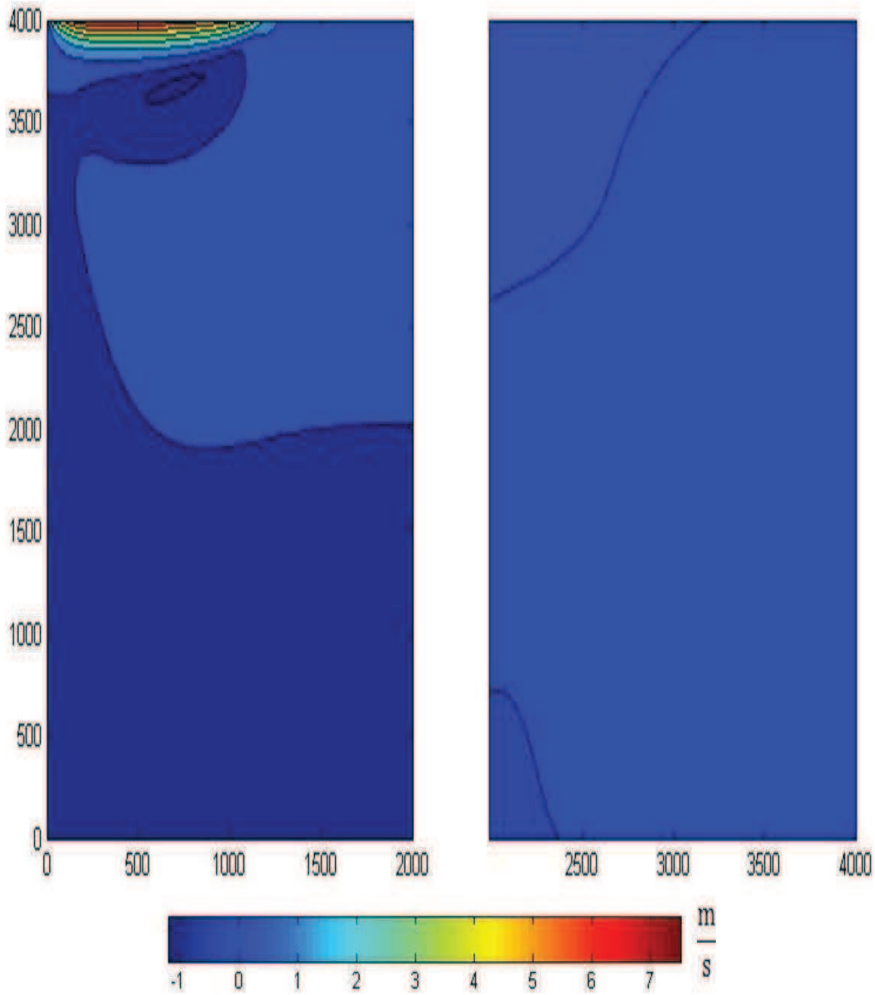

圖 40: 分解定義域藉由二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之東西向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現模擬結果與單一定義域的使用相同, 東西向速度僅於西北邊界處有極大值存在。

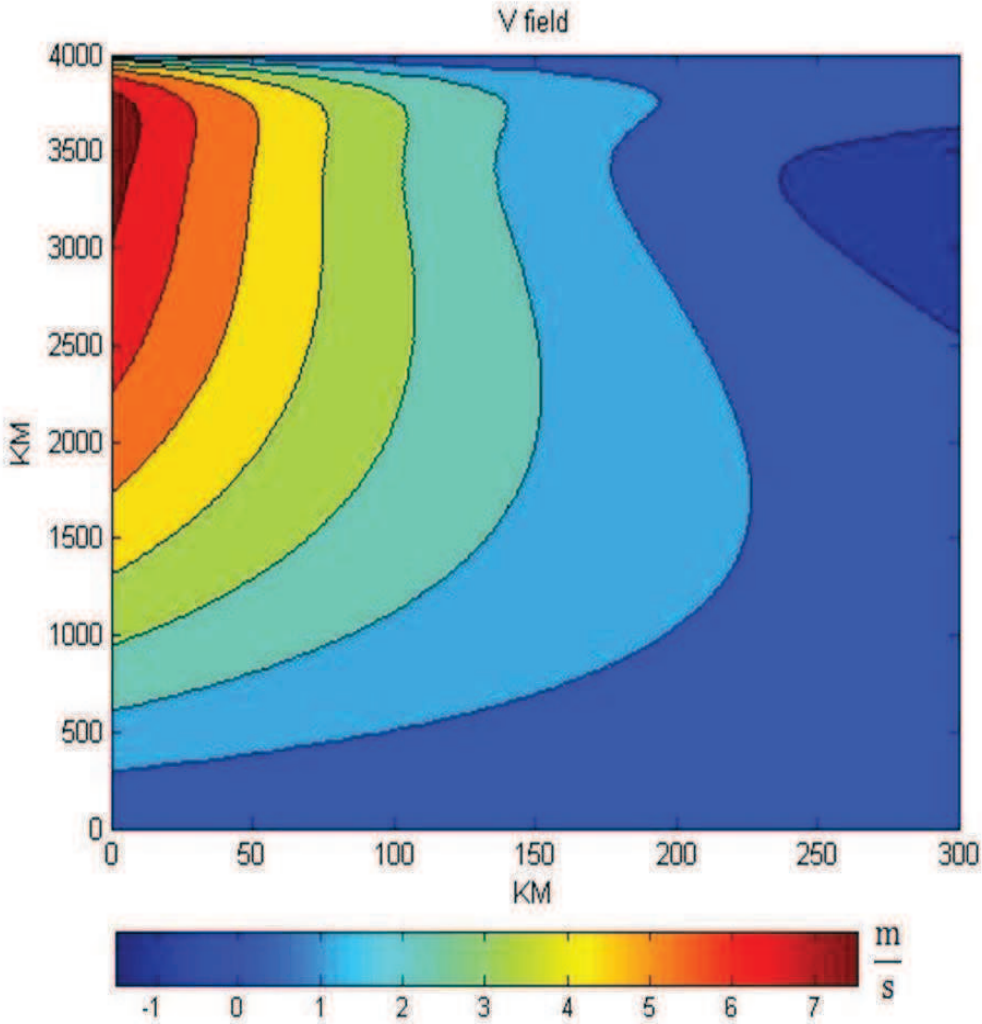

圖 41: 分解定義域藉由二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之南北向速度場, 擷取西方邊界流區域, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現模擬結果與單一定義域的使用相同, 西方邊界流極大值向北偏移。

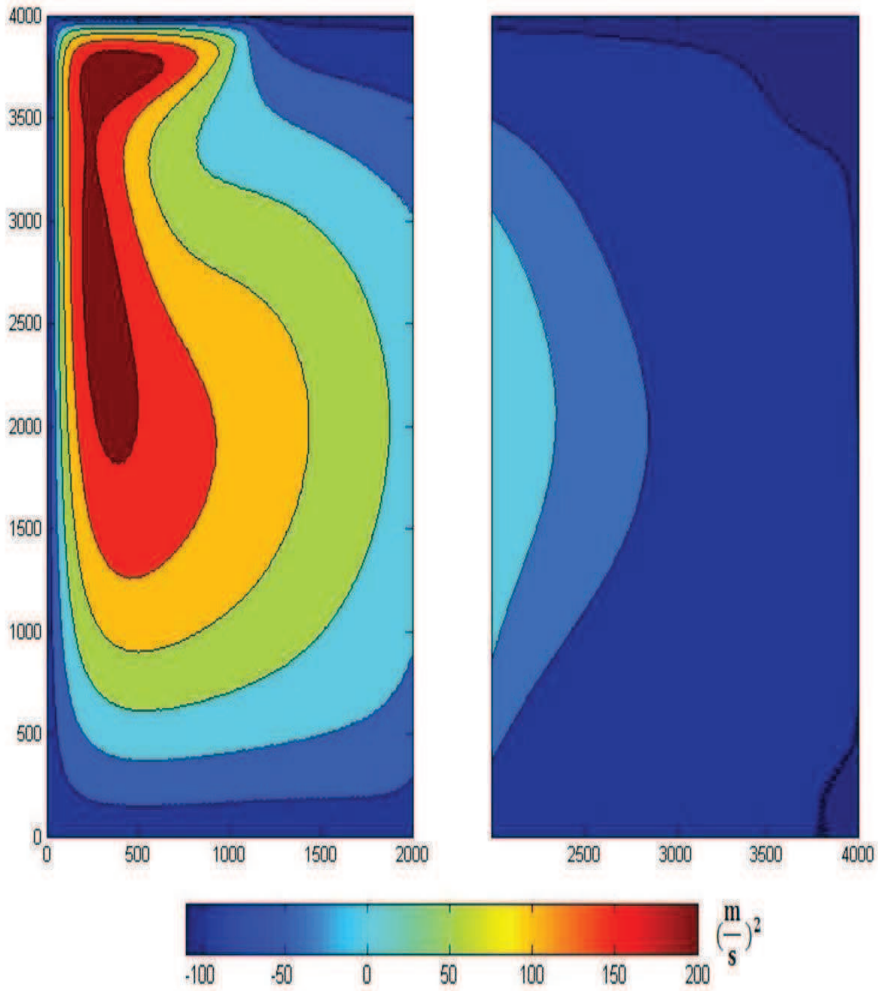

圖 42: 分解定義域藉由二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之重力位高度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})^2$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現模擬結果與單一定義域的使用相同, 重力位高度呈現西高東低質量聚集於西方邊界的情形分佈, 且極大值向北偏移。

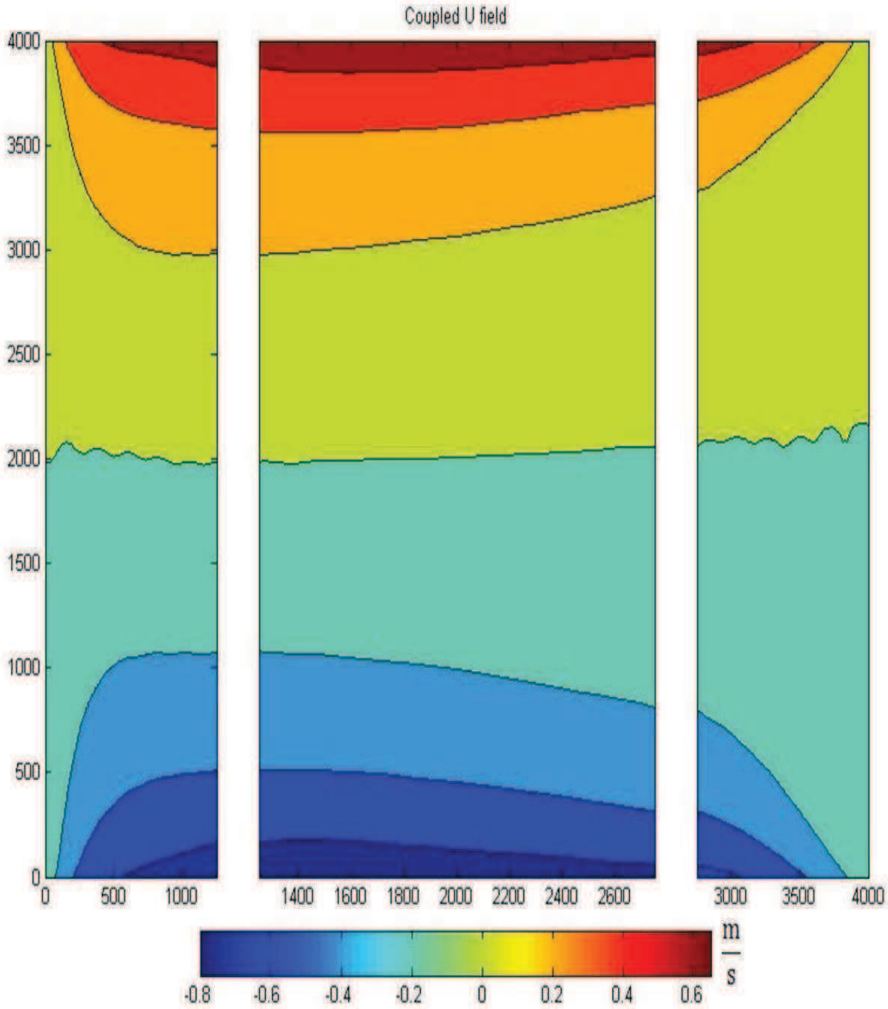

圖 43: 二維非線性耦合模式所模擬之東西向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現東西向速度場呈現南北反對稱的形式, 北邊爲正 (向東) 南邊爲負 (向西) 。

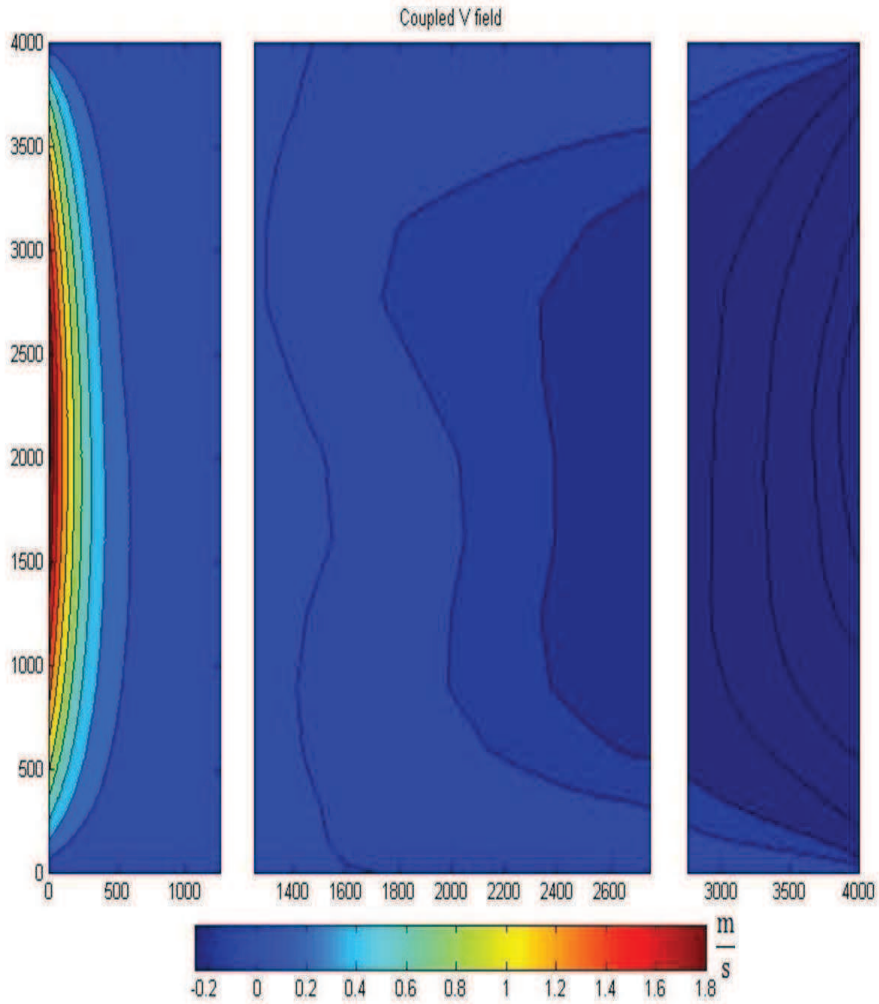

圖 44: 二維非線性耦合模式所模擬之南北向速度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現西方邊界處有向北運動極大值, 東方邊界具向南運動極大值, 且運動速度量值較西方邊界爲小。

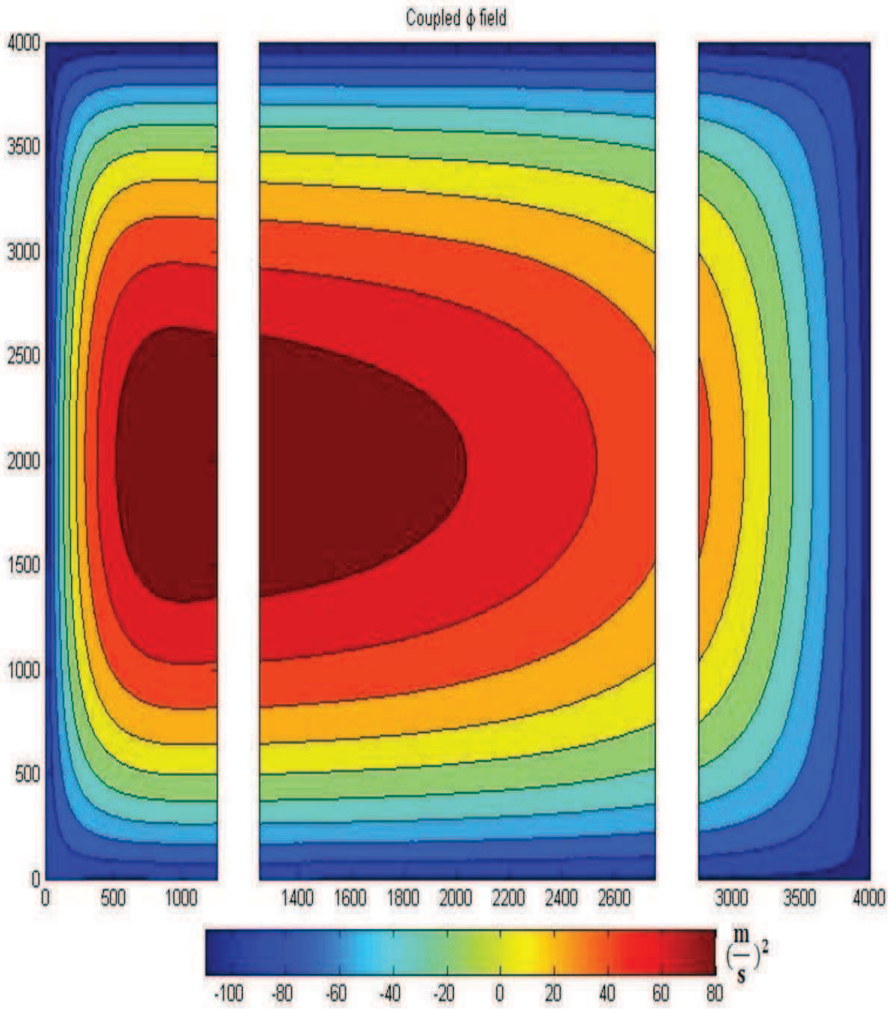

圖 45: 二維非線性耦合模式所模擬之重力位高度場, 單位爲 $(\frac{m}{s})^2$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現重力位高度呈現西高東低的分佈情形。

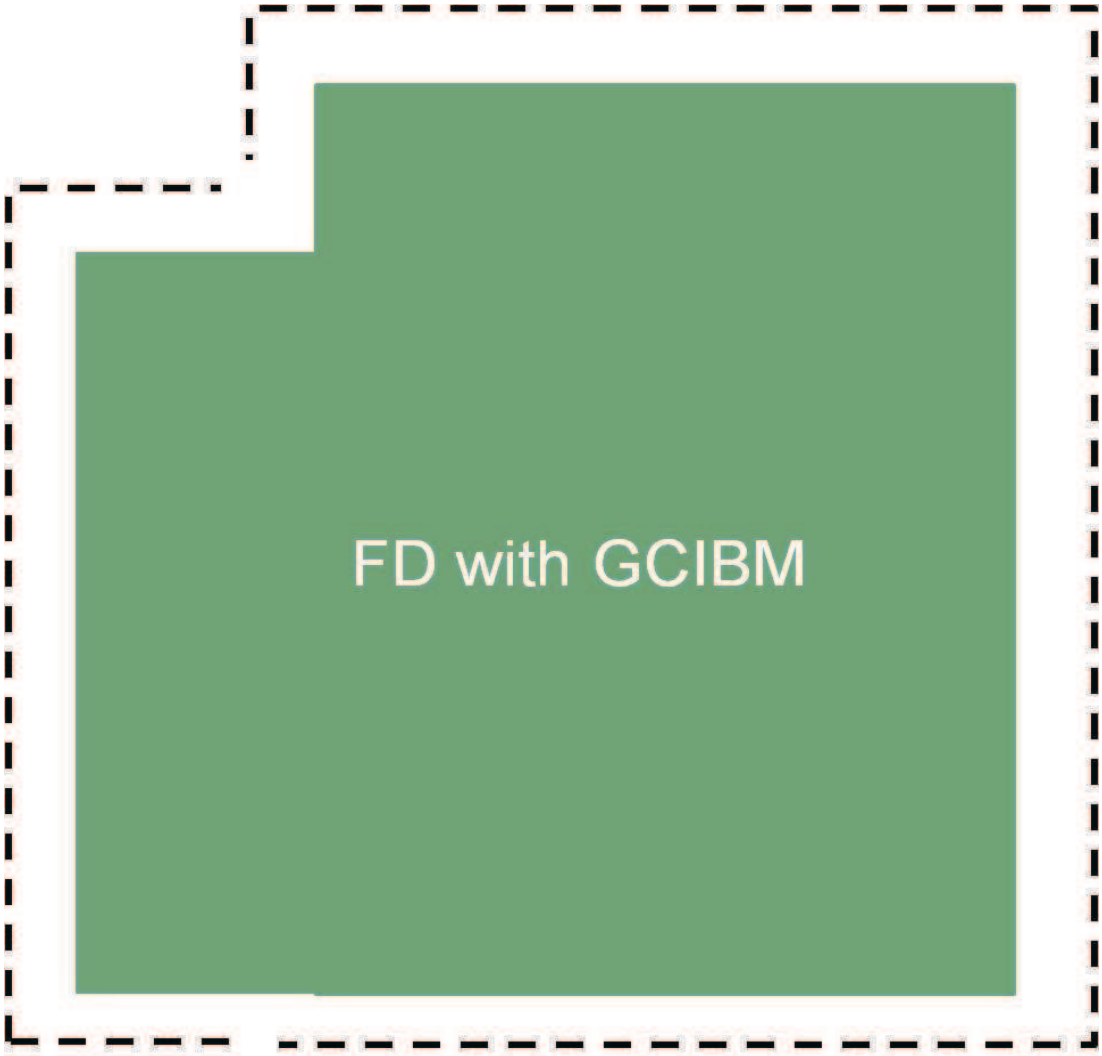

圖 46: 不規則邊界西方邊界流模式定義域示意圖; 於原模式西北邊界定義域處增加一地形邊界進行模擬, 並利用虛網格沉浸邊界法 (虛線) 給定模式邊界條件。

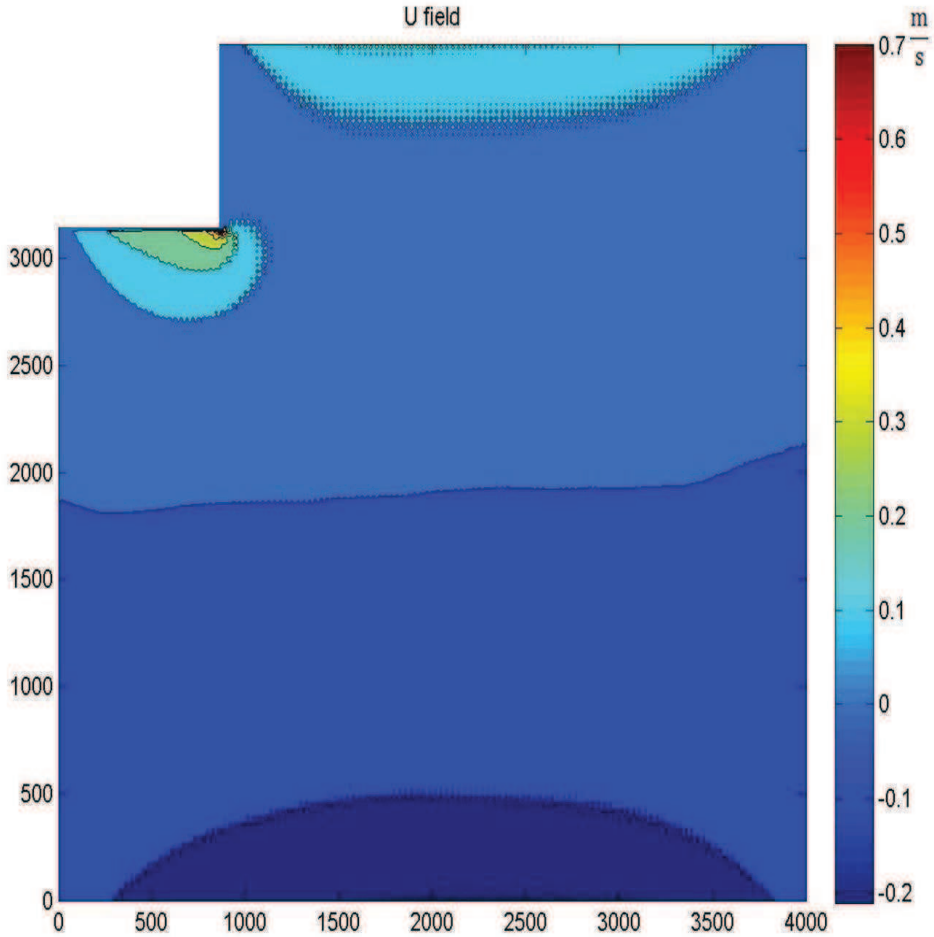

圖 47: 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之東西向速度場 (西北邊界尺度875*875公里) , 單位爲 ($\frac{m}{s}$) , 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現東西向速度場僅於模式原北方邊界與新增之北方邊界有極值存在 。

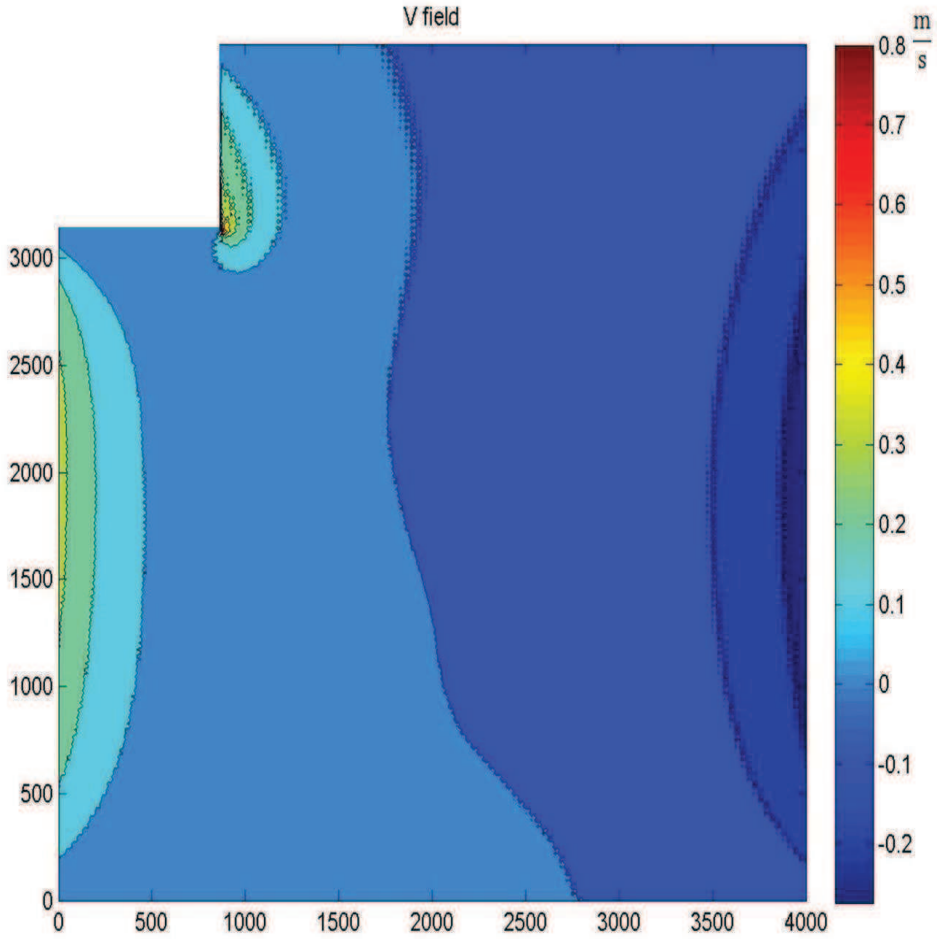

圖 48: 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之南北向速度場 (西北邊界尺度875*875公里)，單位爲 ($\frac{m}{s}$)，橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現南北向速度場於原西方邊界處與新增之西方邊界處有極值存在。

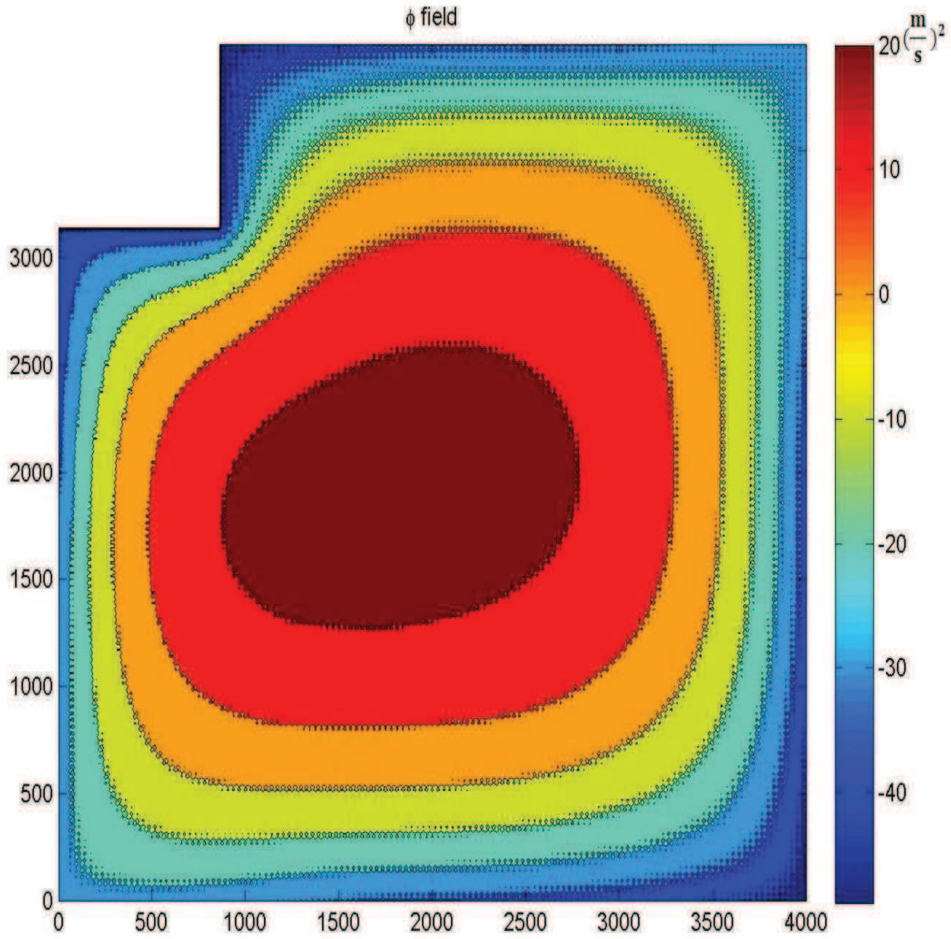

圖 49: 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之重力位高度場 (西北邊界尺度875*875公里) , 單位爲$(\frac{m}{s})^2$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現海洋重力位高度有向西方邊界延伸之趨勢。

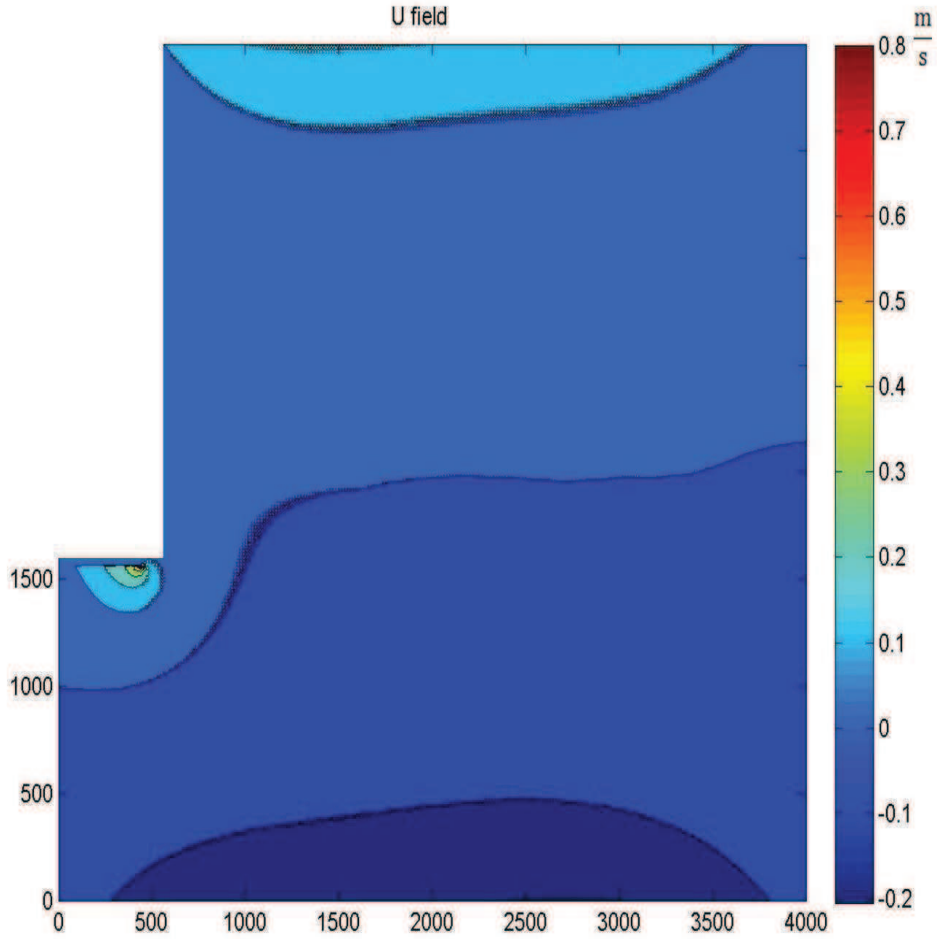

圖 50: 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之東西向速度場 (西北邊界尺度500*2500公里) , 單位爲 ($\frac{m}{s}$) , 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現東西向速度場僅於模式原北方邊界與新增之北方邊界有極值存在 。

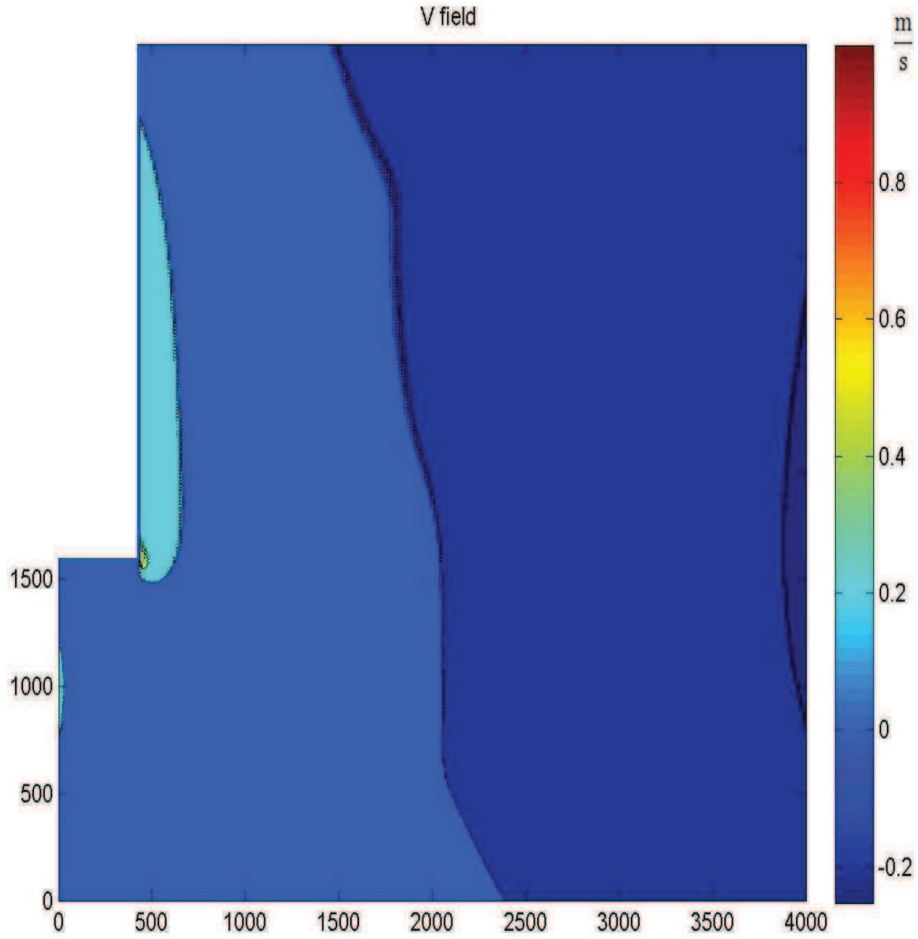

圖 51: 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之南北向速度場 (西北邊界尺度500*2500公里) , 單位爲 ($\frac{m}{s}$) , 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現南北向速度場於原西方邊界處與新增之西方邊界處有極值存在。

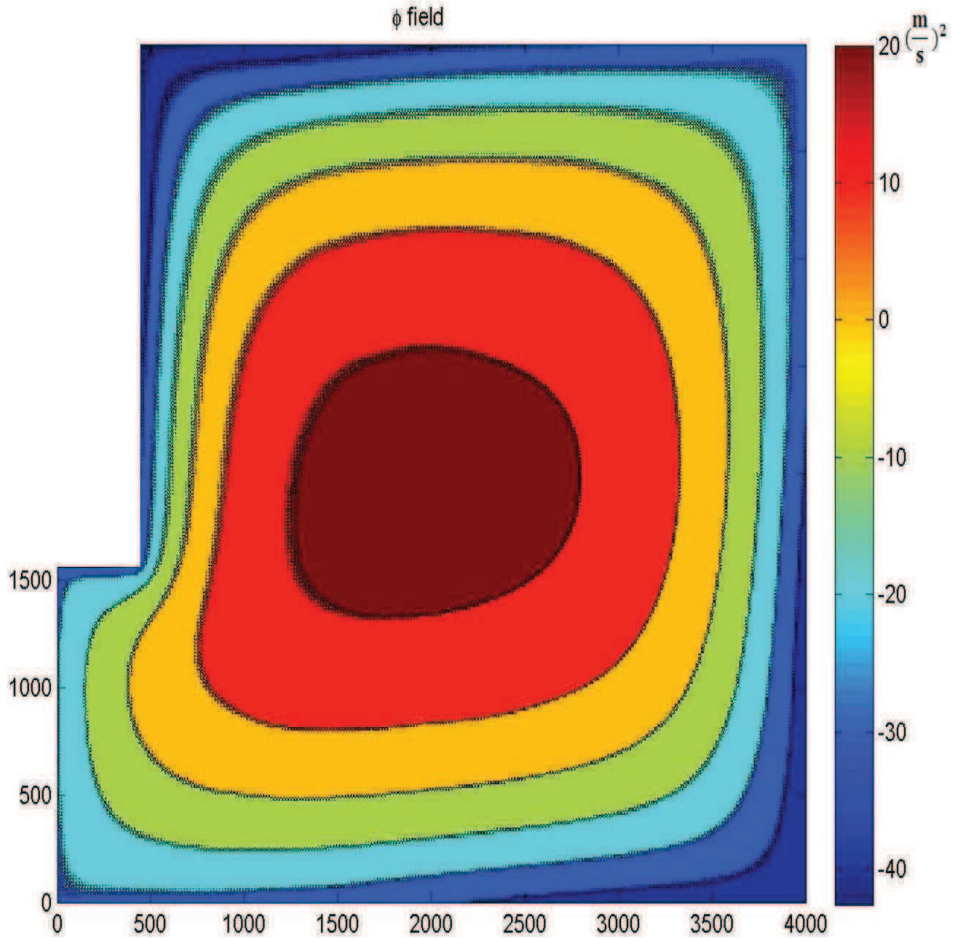

圖 52: 二階中差分法搭配虛網格沉浸邊界法所模擬之重力位高度場 (西北邊界尺度500*2500公里) , 單位爲 $(\frac{m}{s})^2$, 橫軸與縱軸分別爲東西向與南北向座標, 單位皆爲公里; 可發現海洋重力位高度有向西方邊界延伸之趨勢。

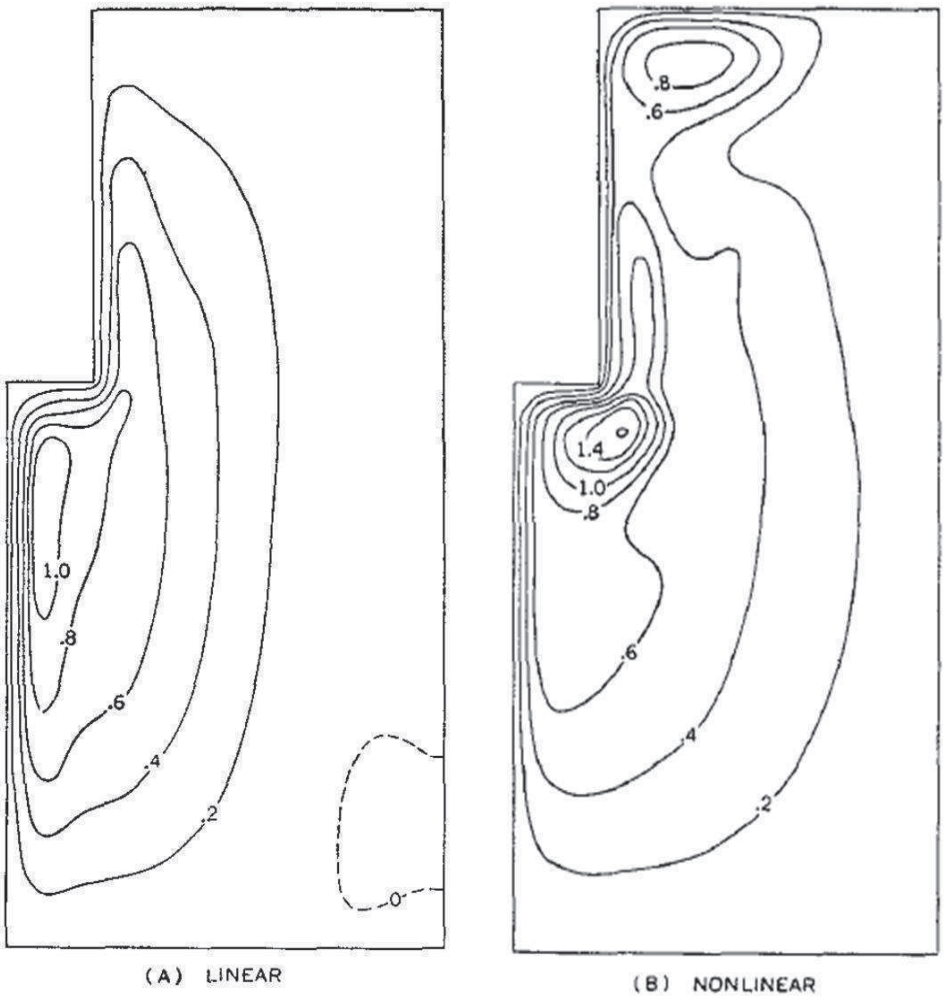

圖 53: 不規則邊界對於西方邊界流運動之影響, 等值線爲無因次流函數場, 左右兩圖分別爲線性與非線性模式之模擬結果; 可發現增加地形複雜度時, 西方邊界流將沿新增之地形邊界運動。(摘自Bryan, 1963)

附錄 A

不規則邊界之西方邊界流

根據 Bryan (1963) 之研究結果 (圖 53) , 西方邊界流運動場特徵與邊界大陸地形具強烈相關性存在; 海洋西方邊界出現不規則之大陸地形時, 西方邊界流流場將沿不規則的大陸邊界運動。在研究中, 我們於原模式定義域之西北處增加一大陸邊界, 試圖探討不規則大陸地形邊界對於海洋西方邊界流運動的影響, 並檢驗虛網格沉浸邊界法對於此類邊界之應用; 增加西北邊界地形複雜度之示意圖如圖 46所示。實驗中藉由改變模式西北邊界地形大小測試西方邊界流運動與模式對於西北邊界地形尺度變化之敏感度; 在原模式 4000*4000公里之東西與南北向定義域中分別於西北邊界處加入 875*875公里與 500*2500公里之地形邊界, 模擬中以 (3.18) 做爲模式控制方程, 於東西與南北方向各使用 256 個等間距網格點進行模擬, 時間積分選用四階容庫法進行, 以 $u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = \phi(x, y, 0) = 0$ 之初始條件開始積分, 積分時步爲 10秒, 於各積分時步之預報結果中利用虛網格沉浸邊界法 (3.19) 間接給定模式邊界條件, 積分一日至近似穩定解之結果如圖 47 至 52所示。

模擬結果顯示, 海洋西方邊界流確實將沿不規則大陸邊界運動, 與 Bryan (1963) 的研究具一致之運動特徵, 且此現象與所新增之邊界空間尺度無關。由圖 47與圖 50, 可發現東西向運動場極值位於原模式北方邊界與新增之北方邊界, 圖 48與圖 51 則顯示南北向運動場極值位於原模式西方邊界與新增之西方邊界, 而圖 49與圖 52 可發現海洋重力位高度場將有向西方邊界延伸的特性。