

授課老師：郭鴻基

請務必依序作答，不要讓老師在整張考卷找尋失序的答案；。

共計 200 分，標準化成 100 分。

1 (20分)

The Malthusian model, $dP/dt = kP$, is not realistic for a population that is naturally limited by environmental factors such as finite space and finite food supply. A simple model that takes into account the sustainability of the environment to the population growth is the *logistic* model.

The logistic model is

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right), \quad P(0) = P_0.$$

- (a) 解釋此模式的科學意義，
- (b) 討論平衡態的穩定度以及所謂的環境承載，

2 (50分)

考慮兩個族群的競爭，其控制方程式 (model of competition) 為

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= k_1 P \left(1 - \frac{P}{c_1}\right) - \alpha_1 PQ, \\ \frac{dQ}{dt} &= k_2 Q \left(1 - \frac{Q}{c_2}\right) - \alpha_2 PQ, \end{aligned}$$

在上式中的常數及族群數目皆為正值。

- (a) 將上式無因次化成

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k_1 x(1 - x - ay) \\ \frac{dy}{dt} &= k_2 y(1 - y - bx) \end{aligned}$$

- (b) a 與 b 之科學意義為何？

- (c) 以 nullclines, directional field 分析兩個弱族群的平衡。
 (d) 以 nullclines, directional field 分析一個弱一個強族群的平衡。
 (e) 以 nullclines, directional field 分析兩個強族群的平衡。

3 (40分)

考慮一個掠食者與一個被掠食者的族群, 其控制方程式 (model of predation) 為

$$\frac{dP}{dt} = k_1 P \left(1 - \frac{P}{c_1}\right) - \alpha_1 PQ,$$

$$\frac{dQ}{dt} = -k_2 Q + \alpha_2 PQ,$$

(a) 將上式無因次化成

$$\frac{dx}{dt} = k_1 x \left(1 - \frac{x}{\epsilon} - y\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = -k_2 y (1 - x)$$

(b) ϵ 之科學意義為何?

(c) 以 nullclines, directional field 分析 $\epsilon > 1$ 以及 $\epsilon < 1$ 。

(d) 討論何種情形掠食者會滅絕?(老子云: 柔弱勝剛強, **but how?!**)

4 (20分)

以 Volterra 方程加上 harvest, 討論掠食者與一個被掠食者的族群的生態平衡

$$\frac{dx}{dt} = x - xy - h_1 x$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + xy - h_2 y$$

為何殺蟲劑不分青紅皂白的使用, 反而使生態往壞蟲方向移動。

5 (20分)

考慮 "AA", "Aa", "aa" 的遺傳, inbreedings 是被允許, 以 markov matrix 寫出遺傳演化方程並解釋之, 討論最終平衡態哪類型遺傳會消失。

6 (30分) 考慮一生態區內, 兩個族群各自繁殖, 其 section model 離散動力系統 (discrete dynamics system) 為

$$W_{t+1} = aW_t,$$

$$M_{t+1} = bM_t.$$

定義

$$P_t = \frac{M_t}{M_t + W_t}$$

- (a) 導出 P_{t+1} 和 P_t 關係式子。
 (b) 求其平衡態。
 (c) 考慮 $a/b > 1, a/b < 1$ 進行穩度分析, 並討論生態的主宰性。

7 (10分)

討論戰爭的模式, 最有名的動力模式為 Lanchestrian model, 因其曾經成功的 模擬 硫磺島戰役的過程, 因此模式被廣泛的接受, 考慮正規戰模式 (conventional war)

$$\frac{dx}{dt} = -ay + f(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -bx + g(t)$$

以及正規-游擊戰模式 (conventional-guerilla war)

$$\frac{dx}{dt} = -cxy + f(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -dx + g(t)$$

那個變數是游擊隊? 討論上面兩個模式方程各項的意義。

8 (10分) 令 "A" 為肝內部的藥劑濃度, "T" 為腫瘤體積, 分別為下列方程式控制

$$\frac{dT}{dt} = 0.3 \ln\left(\frac{100}{T}\right)T - \frac{2A}{20 + A}T^{2/3},$$

$$\frac{dA}{dt} = c_0\rho - \frac{0.5A}{10 + A}T^{2/3} - A.$$

討論此二方程式之意義。