96年度大學基礎科學人才培育銜接計畫

生命系統與動力模型

數學的美
充斥在大自然的
每個角落

作者：陳仁乾　　指導教授：郭鴻基

引言：科學歷史的發展，總是伴隨著人文的思惟。建立跨世紀科學發現的科學家，背後也總是有支持他們這樣追尋知識的哲學想法。從蘇格拉底時代的哲學辯論，到笛卡耳的「我思故我在」，人文思考一直都佔有科學進步舉足輕重的地位。今天，我們要追尋歷史的腳步，以數學的模型，來詮釋自然學家的文字記錄。用科學的語言--數學，來審視演化論的創始人：達爾文--一位數學學歷不高，卻擁有獨特的數學眼光的自然學家，在演化論上的獨到見解。

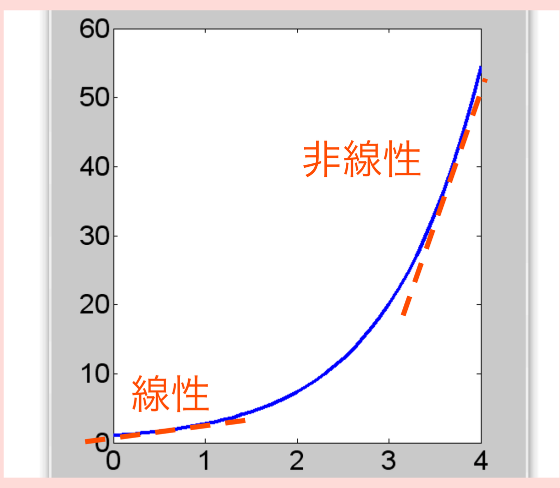
以下文字摘自達爾文 (Darwin)「物競天擇」一書，達爾文不是數學家, 但是他對科學問題與數學連結有非常強的觀察力：

A struggle for existence inevitably follows from the high rate at which all organic beings tend to increase. Every being, which during its natural lifetime produces several eggs or seeds, must suffer destruction during some period of its life, and during some season or occasional year; otherwise, on the principle of geometrical increase, its number would quickly become so **inordinately great** that no country could support the product.

根據達爾文的敘述，生物在無限制的成長環境下，成長速度很快。而指數成長比任何多項式更快，所以我們使用指數成長來描述這種成長環境。

事實上，馬爾薩斯(Thomas Robert Malthus)的人口模型也是使用指數的成長：在人口少時，是接近線性；而之後人口則會非線性的快速飆升。

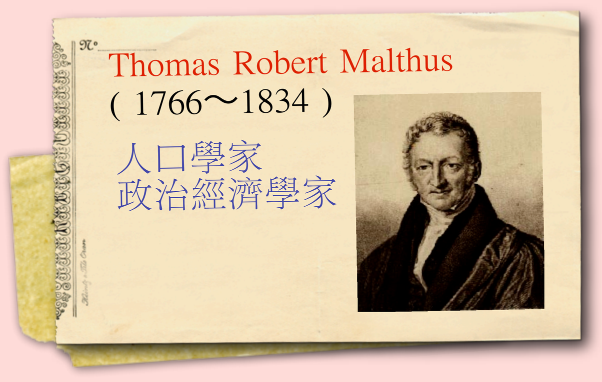
Population Growth



$$\boxed{\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}}\qquad \frac{dp}{dt}=\alpha p \;\rightarrow\; p=p_0e^{\alpha t}$$

線性　非線性

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$



Hence, as more individuals are produced than can possibly survive, there must in every case be a struggle for existence, either one individual with another of the same species, or with the individuals of distinct species, or with physical conditions of life. It is the doctrine of Malthus applied with manifold force to the whole animal and vegetable kingdoms; for in this case there can be no artificial increase of food, and no prudential restraint from marriage. Although some species may be now increasing, more or less rapidly, in numbers, all cannot do so, for the world would not hold them....The amount of food for each species of course gives the extreme limit to which each can increase.

以上是描述生物系統最簡單的動力模型。但就如同上面引述達爾文的話中所描述的，這樣子的成長毫無上限，並不符合現實生態中的情形。

為此，後世的科學家做了許多修正它的其他動力模型。以下引述的是比利時數學家Verhulst在1840年提出的模型，通稱為Logistic模型。

$$P'(t)=\lambda P(t)(M-P(t))$$

Logistic Model

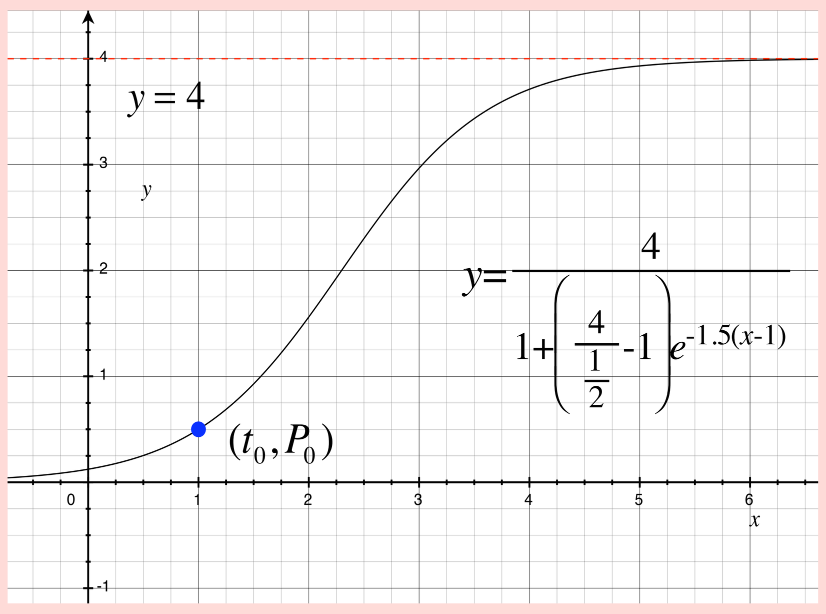
$$P'(t)=\lambda P(t)(M-P(t))$$

$$\int\frac{P'(t)}{P(t)(M-P(t))}dt=\frac{1}{M}\ln\frac{P(t)}{M-P(t)}+C=\int\lambda dt=\lambda t+C_1$$

$$\frac{P(t)}{M-P(t)}=C_2\cdot e^{M\lambda t}$$

$$P(t)=\frac{M}{1+C_3e^{-\lambda Mt}}$$

$$P(t)=\frac{M}{1+\left(\frac{M}{P_0}-1\right)e^{-\lambda M(t-t_0)}}$$



可以看出，在數字小的時候，主導項是$\lambda MP(t)$。這時它看起來接近指數成長的函數。但隨著數字的增大，主導項轉為$-\lambda P^2(t)$ 這時函數值區近於 M。

這個微分方程不難解。將其積分後比較左右兩項，就可以求得 $P(t)$。最後找出各係數的關係和意義，就可以開始作圖了。

左圖設定 $M=4, P_0=\frac{1}{2}, t_0=1$，

$$y=\frac{4}{1+\left(\frac{4}{\frac{1}{2}}-1\right)e^{-1.5(x-1)}}$$

(t_0, P_0)

可以看出 y 就如同我們所推想的，先是以指數的方式成長，隨即反曲後趨緩並貼近 y = 4。

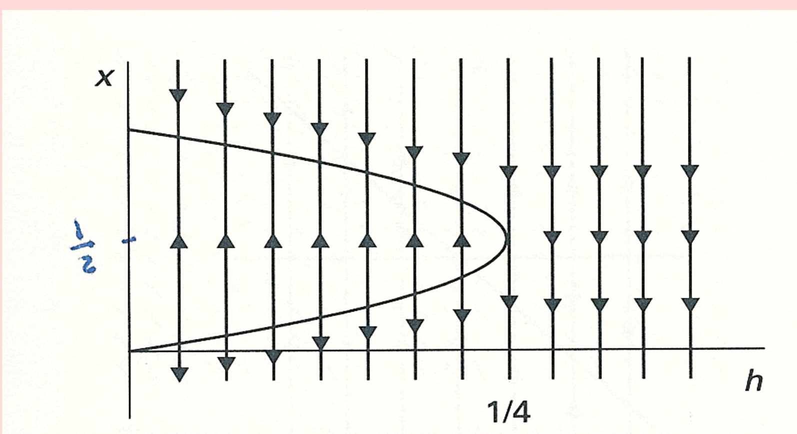


Figure 1.7　The bifurcation diagram for $f_h(x) = x(1 - x) - h$.

除了訂定它在自然界中因環境限制而趨緩的因素，我們還可以另外加上一個外力 h 。這是指所有的 x 物種都同樣減少，和其本身的數量無關，通常這是人為的因素引起的（如加殺蟲劑等等）。在左圖可以看出一旦 h 超過1/4，x 就會往下趨進到 0。在這之前只要x不要低於曲線就能回復到一個穩定狀態。

The amount of food for each species of course gives the extreme limit to which each can increase: but very frequently it is not the obtaining food, but the serving as prey to other animals, which determines the average numbers of a species.

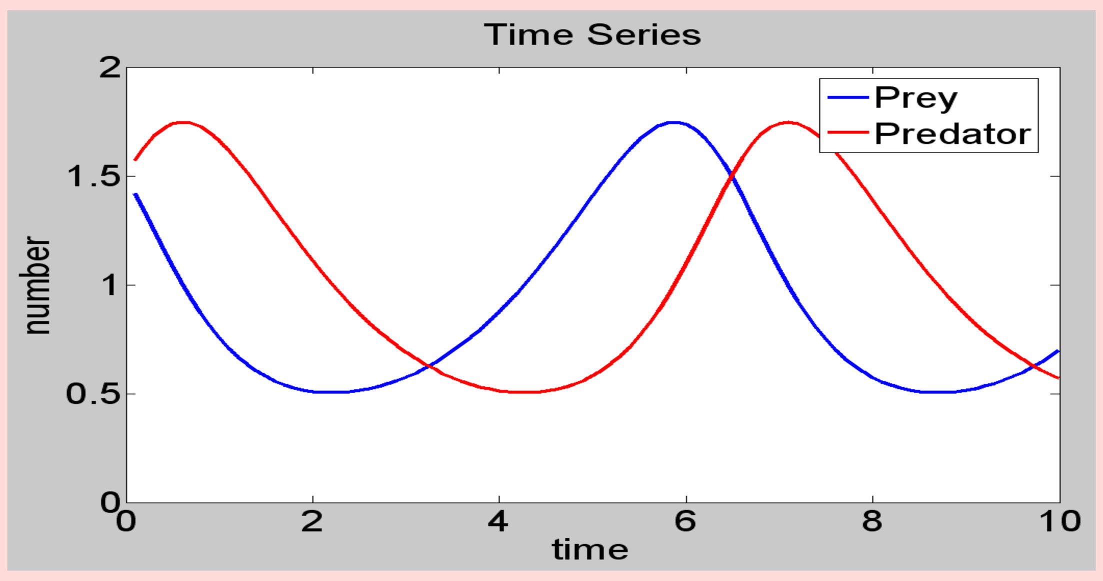
在之前的模型，都是敘述單一的物種。在這裡達爾文指出獵物和獵食者相互間的作用：獵食者數量與獵物成正相關，而獵物與獵食者成負相關。

令獵食者為 y ，被獵者為 x 則兩者關係可以用下面的式子來呈現：

$$\frac{dx}{dt}=x-xy$$

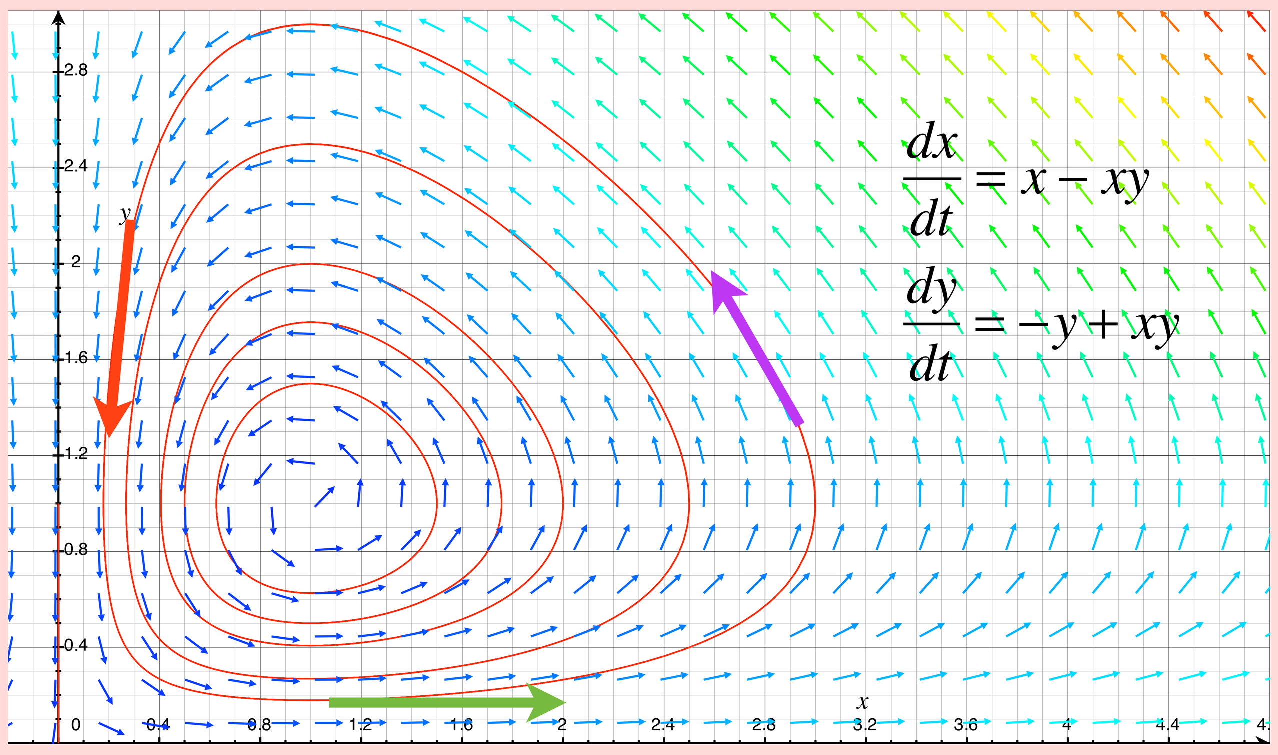
$$\frac{dy}{dt}=-y+xy$$

Time Series (時間序列)



其和時間的關係如左圖，獵物隨著獵食者增加而減少，獵食者則因獵物增加而增加。

下面這是一張用不同初始值，對應xy軸的圖片



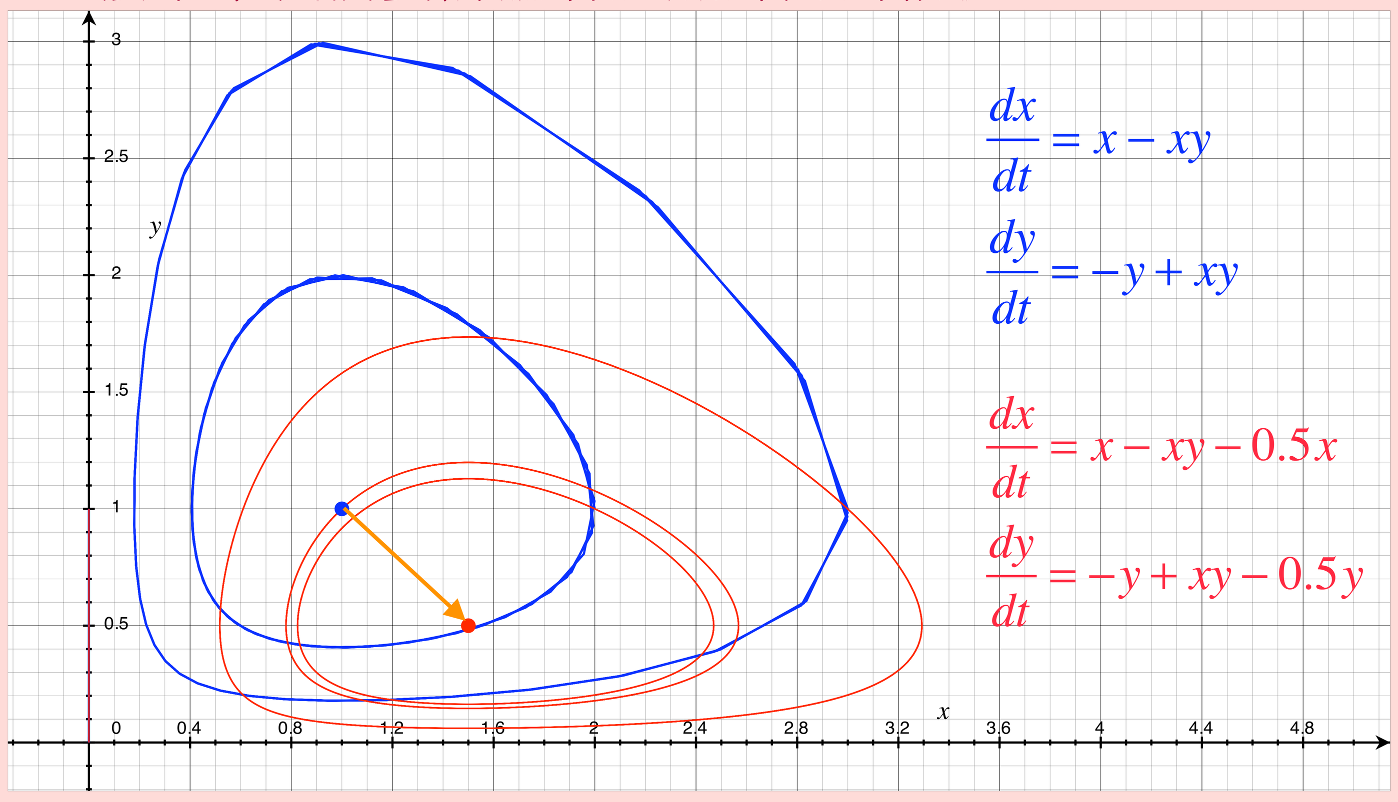
紅色的圈圈是不同初始值對應的獵物與獵食者模型。內圈是比較穩定的狀態，其vector field偏向深藍色，其循環較為溫和。

外圈可以看到：紫色箭頭的區域，獵物多的時候倒向獵食者多而獵物少的速度是非常快的：而當獵物和獵食者少的時候，獵物成長的速度則是相當緩慢（直觀上而言：獵食比生小孩簡單）。

紫色和紅色箭頭都是相較之下比較快的。只是紫色箭頭是由慢變快，而紅色箭頭則是自快漸緩，可見變動最劇烈的時候，是在獵食者多的時候。

這張圖還傳達了許多訊息：若是一開始設定獵食者多，或是獵物多的情況下，其系統是不穩定的（動態平衡的震幅變大）。容易變成兩者都瀕臨滅絕的情況。相對之下，獵物和獵食者都接近平衡值得時候生態就穩定的多。

接下來我們要討論有施加外力的情況：



在x,y兩族群上都施予一個減少的外力。可以看到整個圖形往下壓扁，還有往右延伸。

在獵物減少的同時，獵食者能攝取到的食物也變少了。所以對獵食者影響的幅度相當大。至於獵物，雖然本身有受到外力的影響而減少，但對它最大的威脅：獵食者也減少了，所以甚至有可能變成增多的情形。

在現實中的例子，就是在非洲使用DDT殺蟲劑的例子。這種殺蟲劑會在生物體內累積，並在被獵食的情況下傳給下一個生物，所以對獵食者與獵物傷害同樣都很大。但這種殺蟲劑不但沒有解決當地的蟲害，反而還助長了！而且殺蟲劑也經過層層的食物鏈傳到了當地人的身上。當時人們百思不得其解，但從這張圖上，我們可以得到還不錯的解釋：外在使其減少的傷害，反映在獵食者身上的比較多。

結論與學習心得：科學的建構，是從複雜的事物中，尋找其簡單的成份。把個別的元素進行分析，再重新建構起單純漂亮的模型。在這個報告中，我們從簡單的指數開始，接下來加入外在環境的限制，進而討論天敵間的互動模式。用數學的眼光來詮釋複雜的系統，重點是要能找出系統中最關鍵的因子，而達爾文憑著細心的觀察，做到這一點了。讓我不禁對這位百年前的巨人，肅然起敬。