愛習一點靈

輕 鬆 看 數 學 建 模 與 科 學 研 究

臺大教學發展中心「樂在學習系列演講」
主題：輕鬆看數學建模與科學研究
時間：2010/5/17 12:30-14:30
地點：總圖書館B1 國際會議廳
講者：郭鴻基教授（臺大大氣系）
整理：卓永鴻 (臺大歷史系，個別學習諮詢微積分小老師)

數學是科學的語言，透過數學模式能夠强化科學研究能力，而數學更早已透過當代科技的進步與運用，融入我們的生活之中。隨著電腦的進步與資料的數位化，數學建模、科學計算、分析詮釋與驗證等過程，更是現今數理科學的典範。

演講一開始，對數學建模研究深厚的郭鴻基老師援引達爾文的話。他認為「錯誤的事實」對科學研究來說是非常糟糕、很有破壞力的，然而「錯誤的觀點」如果是奠基在證據的支持上，倒不一定有壞處。因為科學的發展過程，就是後起之秀不斷挑戰、推翻老一輩的科學理論，因此提出新的資料來推翻舊的觀點是相當正常的事，但是資料和數據的嚴謹性絕對不容妥協，絕對要禁得起驗證。我們便是希望透過數學模式來幫助我們建立科學觀點。

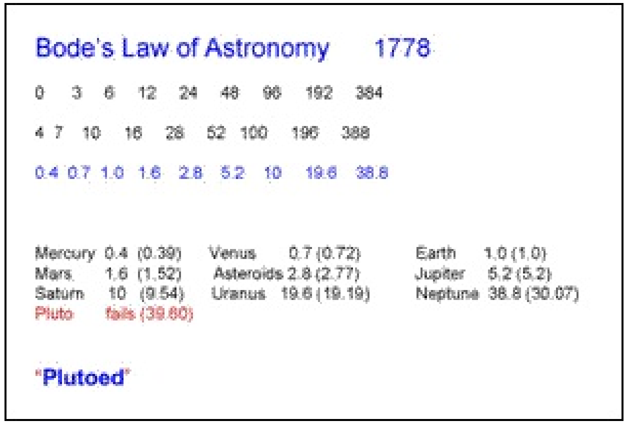
從教育的理念來說，郭老師相信人類不是石頭，必須與外界不斷地溝通、交流。閱讀與寫作就是讓我們活出超越自己的極限，讓我們得以和不同世代的人交流。而算的部份，則是我們與自然溝通的一種方式，自古便有幾何、代數、微積分；到了近代有了電腦，開啟了非線性計算的大門。什麼是線性和非線性呢？簡單地說，線性就是加和減，非線性就是乘和除。讀、寫、算都是教育中很重要的層面，其中算的部份就是今天要談的重點。

從函數談起

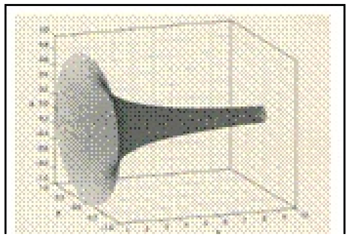
函數是數學裡面非常重要的一個觀念，也是個常會被人誤導的概念。舉一個例來說明函數：創業時，我們要有一定的資金，也要有一定的能力。如果資金不虞匱乏，創業就變成只有能力的函數。反過來說，如果大家都很有能力的話，成功就變成是資金的函數。再舉一個最簡單的例子：「一分耕耘，一分收穫」就是線性函數。但很多時候，同學們花很多時間讀書，考試成績卻不理想，到了下一次考試，同學放棄不讀了，卻反而考很高。這是由於考試的設計常常沒有辦法是線性的，而人生也常常是非線性的。郭老師以此勉勵大家，碩士生的生涯常常是一開始走得很艱辛，到最後才開始突飛猛進，所以我們EQ要高一點。最怕的是一開始進展很順利，到後來很難進步。例如說我們稍微準備一下就可以考到六十分，但若要從六十分進步到一百分，卻要花好幾倍的努力。以上所舉的這些例子，顯示了我們這個世界基本上是個非線性的世界。

用數學模式看世界

接下來郭老師便援引大量的例子，來呈現在科學上，透過數學模式幫助我們帶來什麼觀點。而在某些例子中，我們仍然無法從數學模式得知大自然的奧秘。

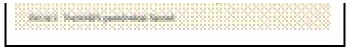


第一個例子是 1778 年提出的 Bode's Law of Astronomy，這是一個有關九大行星的天文學定律 (見圖)。第一排數字從 3 開始的下一個數字都是前一個數字的兩倍；第二排數字中，如果將 4 加 3 會得 7，7 再加上第一排的 3 會得 10，10 加上第一排的 6 得 16，依此類推。最後再把第二排數字都除以 10，則得到第三排數字。我們不知道為何第一排要從 0 跳到 3，第二排要從 4 開始；但有趣的是，如果我們把地球到太陽的距離當作 1，會發現其他行星與太陽距離的比例都十分接近這排數據，唯有冥王星數據偏差較大。曾有人認為這只是數學上的一個巧合，因為冥王星是一個特例，但 2006 年時國際天文學聯合會最終投票將冥王星從九大行星中除名了。無論如何，我們尚無法理解這串獨特數字的奧妙。



然而還是有些數學模式能告訴我們一些奇特的事情。例如發現大氣氣壓能夠壓 76 公分水銀柱的托里切利 (Torricelli)，曾經做一個數學積分：如果我們將 $xy=1$ 這一條曲線繞著 x 軸轉一圈，就會得到一個喇叭的形狀。學過微積分的人很容易就能計算出，這個形狀的體積是一個有限值。有趣的是，如果你計算它的表面積，會發現面積是無窮大。當時英國著名哲學家霍布斯 (Thomas Hobbes) 說，只有神經病

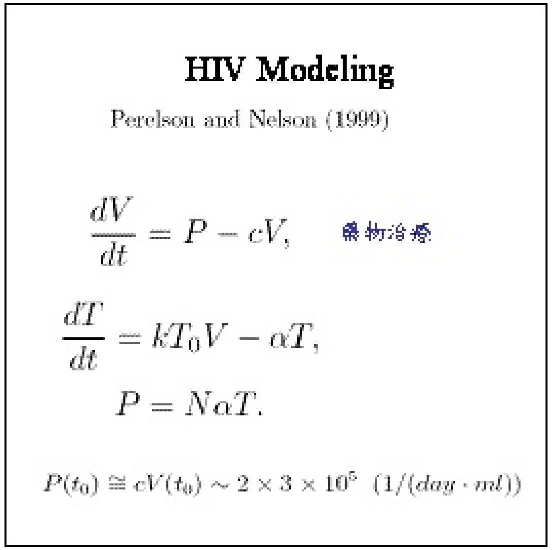
會相信這個說法。他反駁的理由是，如果你向這個喇叭倒油漆下去，所有的面都會沾到油漆，那面積怎麼會是無限大呢？但以微積分的知識其實可以瞭解，體積的量綱相較於面積的量綱，是多乘一個長度的量綱；當一個趨近無限大的東西乘上一個逼近於零的東西，是有可能得到一個有限值的。



早期科學研究時常與哲學思想混雜在一起，人們常在一套科學理論背後，用一套哲學去解釋它。Paul Nahin 的書《When Least Is Best》，便反映了微積分發展時代人們的想法。當時人們相信上帝創造完美的世界，所以世界的運作會滿足一些最小的定理。達文西就說過，每一個動作都要以最短、最經濟的方式來運行。舉光的折射與反射為例，Pierre de Fermat 講過，光在空中是以最短的時間路徑來行走；如果光在不同介質中有不同的速度，那麼光要如何行走才會最快呢？經過簡單的計算之後我們會發現，使光能花最短時間的路徑，就符合折射定律，這就是 Fermat’s principle。至於為什麼光會懂得要選擇最短時間的路徑來走呢？我們還是不知道，但有些人認為這是上帝的旨意。這就是一個利用數學模式讓我們去認識宇宙的例子。

正回饋與負回饋

雖然自然界中時常有複雜的道理隱含其中，然而歸根究底，大自然還是有其最簡單的哲理。郭老師引用了易經中陰陽的概念，「一陰一陽之謂道」，及老子所說的「反者道之動」，來介紹科學中的「正回饋」與「負回饋」。大自然的眾多現象就由正回饋和負回饋所涵蓋。什麼是正回饋？簡單來說就是我對你好，你也跟著對我好，我對你不好，你也跟著對我不好；反過來說，負回饋就是我對你好你卻對我不好，我對你不好你卻又對我好。



若是舉數學函數來說明的話，正回饋就是指數函數(exponential functions)。例如馬爾薩斯所提出的人口論認為，人口會呈指數成長。當人口越多，成長率就越快，成長率越快，人口就越多，這就是可怕的爆炸成長。除了指數成長，指數遞減也是正回饋的一種情形，其中一個例子就是半衰期。1960 年有個名叫 W. F. Libby 的教授，想到碳 12 和碳 14 在活體內的比值是固定的，而生物體死了以後，碳 14 就會呈指數衰減。如果我們假設古時候的碳 12 與碳 14 比值和現在一樣，那麼就可以由此推算這個生物體死亡多久，這就是有名的同位素計年法，Libby 教授也因此得到諾貝爾獎。另一個指數遞減的例子是愛滋病毒的治療，愛滋病病毒數量與我們吃藥之間的關係可以列出微分方程組，要去解出它是不太容易的，但我們不必動手去解出來，也可以直接用看的來看出當中的哲學：根據這個方程組，科學家只要掌握時間、施藥前的病毒量與施藥後的病毒量，就可以

得出愛滋病毒複製的速率。他們發現愛滋病的可怕之處，就是愛滋病毒複製得遠遠比其他病毒要快，快到來不及殺死。因此何大一發展出雞尾酒療法，在一開始就下重藥。我們可以發現，這套治病哲學的背後，其實是來自一個簡單的數學模式。

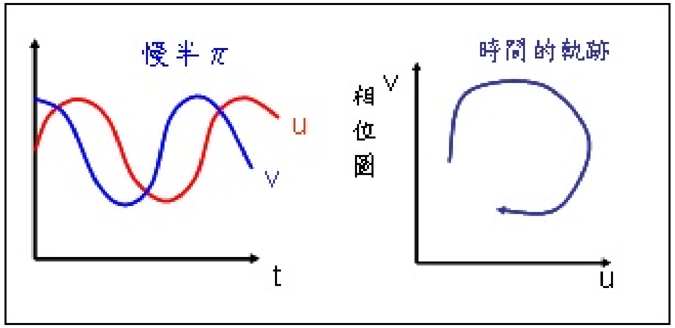
至於負回饋，我們可以用正弦函數 (sin) 和餘弦函數 (cos) 的關係來做例子。可以拿羅密歐與茱麗葉來做一些假設：當茱莉葉對羅蜜歐示愛，羅蜜歐會說我也很愛妳，可是羅蜜歐如果對茱莉葉示愛，茱莉葉的感情會變成負的，這是茱莉葉的善變，也就是負回饋。如果用函數 R 代表羅蜜歐的感情，函數 J 代表茱莉葉的感情，R 微分等於 J，J 微分等於負的 R。如果學過微積分，我們就知道這正是正弦函數與餘弦函數。更有趣的是，正弦與餘弦乘在一起，然後從 0 積分到 2π，就會得到零。這是什麼意思呢？你可以說這是兩個人在談戀愛，中間過程可以很熱鬧 (有很多交集)，可是談了一圈以後最後的結果是零。這也是戀愛小說中最喜歡的情節。如果以相位圖來看，兩人總是一個慢半拍回應，讓對方的心懸在空中，最後感情還是在原地打轉，彼此互不相關。

$$\frac{dR}{dt} = J \qquad \frac{dJ}{dt} = -R$$

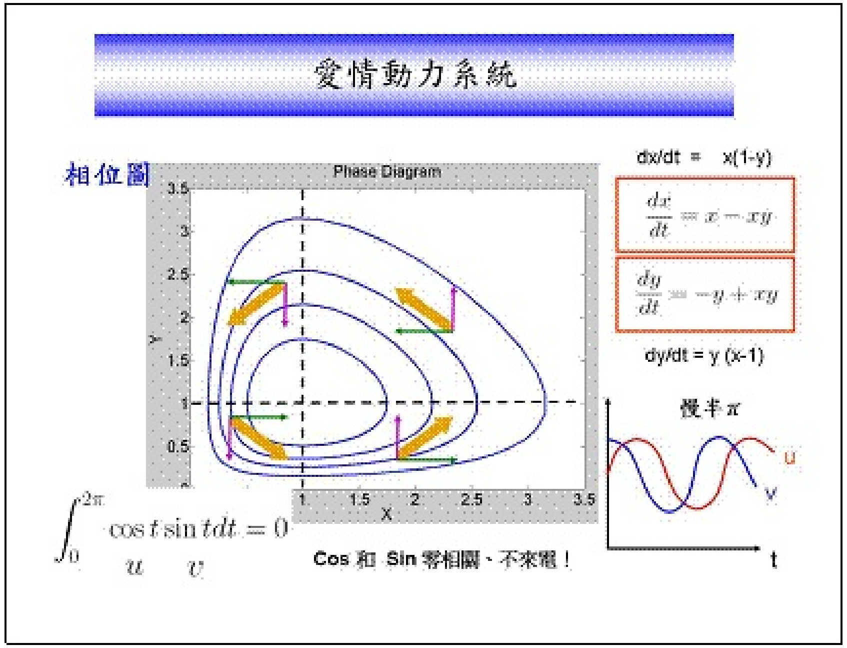
$$\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos t}_{u} \underbrace{\sin t}_{v} dt = 0$$

$$\overline{uv} = 0$$

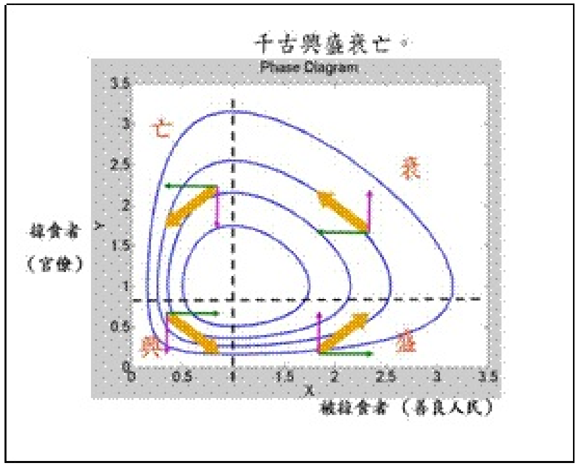
負回饋 (cos 和 sin) 代表的是週期的變化，是自然界非常重要的穩定機制，因為任何東西不可能像正回饋一樣無止盡地增長。舉生態學的例子來說，獅子和瞪羚—捕食者和被補食者—永遠有個相位差：當瞪羚變多，捕食瞪羚的獅子數量也會增加，但當獅子數量增加，獵物瞪羚的數量就會變少，這就是典型的負回饋。Cos 和 sin 之間的互動是週而復始的，經濟學家常說景氣循環，不景氣之後總會復甦，就是建立在自由市場是負回饋市場的假設。



動力系統



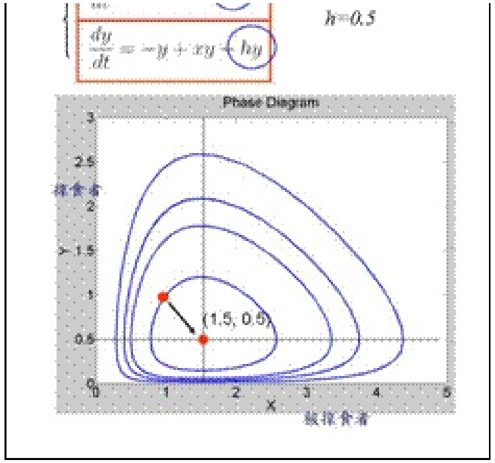
再來看看複雜一點的動力系統。假設 x 和 y 談戀愛， xy 表示兩人在約會。對 y 來說，出去約會感情會增加，自己一個人則感情下降， x 的情況則剛好相反。我們做點簡單的數學，可以得到 x=1 與 y=1 這兩條線。在橫線上方，表示 y 大於 1 ，此時 1 減 y 是負的，而 x 為正，因此 dx/dt 是負的，也就是圖片上向左的綠色箭頭。同樣地，我們可以得到其他綠色與紫紅色箭頭，從而得出兩人隨時間演變的感情關係 (藍線) 就是不斷繞圓圈，和剛剛的負回饋一樣。



這樣的圖如果從古典生物科學來看， y 代表的是掠食者，x 是獵物：掠食者靠自己會餓死，需要抓獵物；獵物自己能存活，碰到掠食者就會死。曾經有學生舉出另一個例子： y 是不事生產的官，專吃老百姓 x ，而老百姓自己過得很好，碰到官就倒楣。於是，同樣的圖代表了一個國家的歷史循環：當官少但人民生活富裕，國家就興；國家盛世，官和人民都增加；但當官多人民生活變差，國家就會漸衰，最後亡國官少人民也少。然而如果有風吹草動，跑到圖外，整個文明就會滅絕。

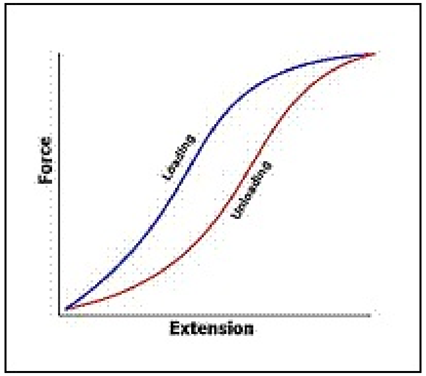
我們可以更進一步來看這個模式

：假設方程組多了官民通殺的梁山泊好漢 h，又會變得如何呢？簡單假設 h 等於 0.5 ，我們將會得到另一個相似的圖，只是圍繞的中心點由 (1,1) 移動到 (1.5, 0.5)。由此我們可以知道，當同時對 x 和 y 進行迫害時，會得到對 x 比較有利的結果，這就是所謂的 “Harvest effect”。用常理簡單說就是，在獵物 x 減少與自身受到迫害的雙重效果下，掠食者 y 必然減少；但對獵物 x 來說，雖然受到迫害，但掠食者的威脅也減少了，因此數量可能還會上升。就像 1960 年代人類使用 DDT 滅蚊，卻發現蚊子更加猖狂，正是因為 DDT 把蚊子的天敵也殺光了，生態系統反而往對蚊子有利的方向移動。



遲滯效應

接下來郭老師又講解了幾個比較重要而有趣的數學模式。1970、80 年代有個重要的現象被提出，叫作遲滯效應 (Hysteresis)。舉例來說，假設橫軸代表通貨膨漲，縱軸是失業率，當通貨膨脹到達某個程度後失業率會飆升，但飆升後就算把經濟條件 (通貨膨脹) 恢復成原來的水準，失業率也不會因此減少，需要更多的努力才會下降。這是因為失業率的上升 (紅線) 與下降 (藍線) 分循兩條不同曲線。「病來如山倒，病去如抽絲」、「發胖容易變瘦難」也是一樣的道理。同樣地，當環境的破壞超過一個臨界點之後，要恢復就變得非常困難；這時就算回到臨界點，環境也不會復原，必須花費更多力氣才救得回來。因此，人們常將此現象叫做災難性理論，在土木工程學上被廣泛討論。若在婚姻例子中，臨界點就是劈腿。一旦劈腿，感情就很難挽回了。



自我相似性 **VS.** 尺度差異

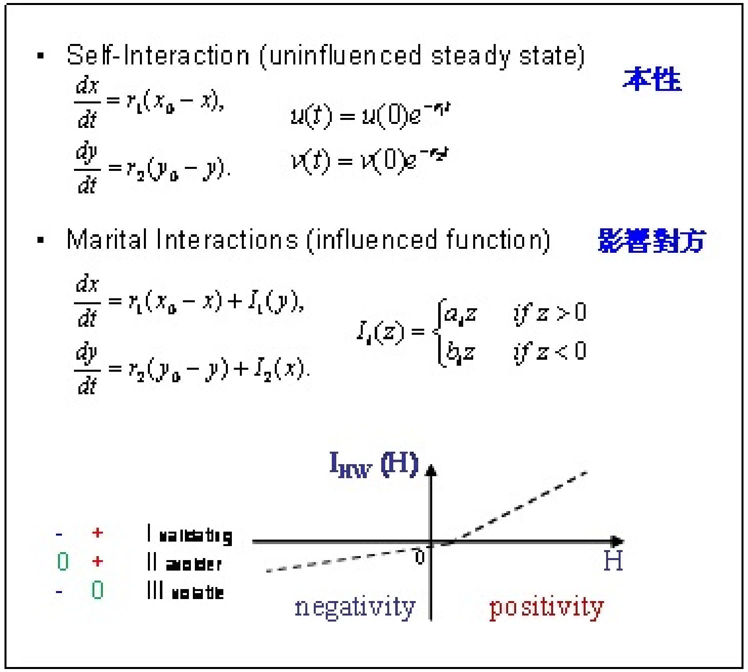
有位知名氣象學家叫 Lewis Fry Richardson，他是個非戰主義者，對德軍在二次大戰利用氣象學進攻感到深惡痛絕，後來改做賽局理論，研究兩國的軍備競賽。這種競賽是一種正回饋：你添購了武器我也要跟著增强實力，然後彼此越看越不順眼，遲早會打起來。Richardson 認為適時地降温 (如政權輪替) 可以避免戰爭發生，就像有人說台灣選舉太多以致事情都做不成。他進一步推論，兩國在軍備競賽時，不讓他們真正打起來方法就是讓他們繼續軍備競賽下去，使兩國都暫無把握而不敢開戰，最後沒效率的國家的經濟自然就會被拖垮。我們若看美蘇軍備戰爭的歷史的話，似乎的確就如 Richardson 在 1953 年的文章所說的這樣。

Richardson 另一個有趣的研究，是他在探討「戰爭的可能性和共同邊界成正比」時，發現各國邊界的長度隨著量度尺度變小而變長；當尺度極小時，邊界就會是無限大，但面積卻是固定的。這又回到之前提到的托里切利的微積分方程式，而這也衍生成後來的碎型理論 (Fractal) 與自我相似性 (大結構中有無限相似的小結構)。

自我相似性其實也就是「一沙一世界，一花一天堂」所指的見微知著。舉個著名的科學例子：美國政府在 1950 年代後將原子彈試爆的影像公開，一位外籍科學家 G. I. Taylor 看完之後，憑著拍照時間點便算出爆炸威力是 10 的 14 次方焦耳，讓美國政府大為震驚。美國政府問他如何知道這個軍事機密? 原來 Taylor 在許多小爆炸的實驗中，得出了一個公式，結果也適用在原子彈這樣的大爆炸中。另一個自我相似性的例子是生物體新陳代謝的速率。科學家發現新陳代謝速率似乎和生物體質量的 4 分之 3 次方成正比，並且每種生物都適用。雖然原因未有定論，但自然界似乎有很多這樣的相似性。

但有的時候，在不同尺度看到的物理現象會不同。例如從大尺度看是桌上的一個蘋果，從小尺度來看卻看到蘋果細胞中的 DNA，兩者完全沒有相似性。又例如量子有穿隧效應，但不表示人可以穿牆而過。因此在談論物理時，必須注意尺度的差異，才能做合理的假設。

婚姻的數學模式



郭老師分享了一個用數學模式分析、輔導人際心理的傑出例子。過去二十年，美國心理學家 John Gottman 受

到生命科學數學家 James D. Murray 的啟發和協助，發展出一套有效的婚姻治療模式。，上圖第一組方程式說的，是兩人會隨時間指數遞減回他們的本性 (X0 和 Y0)，第二組說的則是在婚姻中除了回歸本性，兩人也會互相影響對方。假設這樣的影響是線性函數，將有三種相處模式：分享快樂與不快樂、只分享快樂、只分享不快樂，兩個人配對起來就會有六種模式。經過臨床實驗後， Gottman 發現有一種配對的夫妻絕對無法長久，就是一個只分享快樂、另一個只分享不快樂，因為兩人毫無交集。他再將另外五種情形定義，發現只要 X* 與 Y* 的結果比 X0 與 Y0 要大，婚姻就能維持。換言之，不管兩人天性悲觀 (負數) 或樂觀 (正數)，只要平衡點比原來要大，婚姻就會穩定。這也解釋了有些天天吵架的婚姻為何能維持？因為天天吵架也比自己一個人過要快樂。於是婚姻治療就可依照這樣的模式著手。

An example of a Validating Couple

$$r_1(x_0 - x^*) + a_1 y^* = 0,$$
$$r_2(y_0 - y^*) + a_2 x^* = 0.$$

The solution is

$$x^* = [x_0 + \frac{a_1}{y_1} y_0]/[1 - \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2}],$$
$$y^* = [y_0 + \frac{a_2}{y_2} x_o]/[1 - \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2}].$$

$$x^* > x_0, \quad and \quad y^* > y_0$$

結語

最後作個總結，我們進行科學研究，是在有限時空之觀察或有限資料去推導無限時空的科學定律，然而我們所建構出來的知識與真實世界仍是差異頗大的。我們以科學觀點來做預測，然後再對預測進行驗證。預測可能會失敗，所以科學觀點是需要不斷被修正的。而以上所舉的這些數學模式的例子，就是在幫助我們做預測，同時也讓我們體會問題的本質。

文章發表日期： **2010 年 12 月 13 日** 轉寄 列印